



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دوره ۴۸، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۵، صفحه ۱۶۹ تا ۱۷۹
Vol. 48, No. 2, Summer 2016, pp. 169-179



نشریه علمی پژوهشی امیرکبیر - مهندسی عمران و محیط زیست

Amirkabir Journal of Science & Research
Civil and Environmental Engineering
(ASJR-CEE)

محاسبه خطای ناشی از جزءبندی به روش قانون بازیافت گرادیان و اصلاح وفقی المان‌ها

اباذر اصغری^{۱*}

۱- استادیار دانشگاه صنعتی ارومیه، دانشکده مهندسی عمران

(دریافت: ۱۳۹۱/۶/۱۱، پذیرش: ۱۳۹۴/۷/۶)

چکیده

از زمان آغاز مدل‌سازی رخدادهای فیزیکی توسط رایانه، روش اجزاء محدود یکی از ابزارهای قوی برای حل عددی محدوده وسیعی از مسائل مهندسی بشمار می‌رود. اما آنچه که مسلم است هنوز به سوال اصلی تعیین مقدار دقیق خطای ناشی از جزءبندی در تحلیل یک مسئله سازه‌ای با استفاده از روش اجزاء محدود معمولی، پاسخی داده نشده است و تقریباً هیچگونه ابزاری مبنی بر مناسب بودن اندازه جزء بکار رفته و صحیح بودن نوع حل در دسترس کاربران وجود ندارد. در این مقاله تلاش شده است یک حل بسته برای المان‌های مثلثی سه گرهی به منظور برآورد خطای ناشی از جزء بندی مسائل محیط‌های پیوسته جامد، به روش قانون بازیافت گرادیان و اصلاح وفقی از نوع نگارش h₁ ارائه شود. براساس حل بسته ارائه شده، امکان محاسبه خطای ناشی از فرایند جزء بندی و نیز تشخیص مناسب بودن اندازه المان‌ها، میسر می‌باشد.

کلمات کلیدی:

اصلاح وفقی، قانون بازیافت گرادیان، پس پردازشگر خطا، نرم خطا، روش اجزاء محدود وفقی

۱- مقدمه

از زمان آغاز مدل‌سازی رخدادهای فیزیکی توسط رایانه، روش اجزاء محدود یکی از ابزارهای قوی برای حل عددی محدوده وسیعی از مسائل مهندسی بشمار می‌رود. در روش اجزاء محدود، محیط پیوسته به اجزاء هندسی ساده تقسیم می‌گردد و با توجه به ترتیب قرارگیری آنها در کنار یکدیگر و ارضاء معادلات تعادل، روابط بنیادی و معادلات سازگاری، مجهولات مسئله به حساب می‌آیند. در مدل اجزاء محدود، وجود اشتباهات عددی در محاسبات منشاء اصلی نگرانی بوده است. خطاهای عددی یا محاسباتی از جمله خصایص اصلی اینگونه مدل‌سازی‌هاست.

یکی از اساسی‌ترین ضعف‌های روش اجزاء محدود، عدم آگاهی از مناسب بودن اندازه المان در تحلیل می‌باشد. در روش اجزاء محدود، تقریباً هیچگونه ابزاری مبنی بر مناسب بودن اندازه المان بکار رفته و صحیح بودن نوع حل، در دسترس کاربران نیست و انتخاب اندازه المان بیشتر براساس توصیه‌های داده شده در این مورد صورت می‌گیرد، بطوری‌که در بعضی مواقع براساس توصیه‌های داده شده حجم مسئله بسیار بزرگ شده و بعضاً غیرممکن می‌شود.

یکی دیگر از ضعف‌های روش اجزاء محدود، عدم اطلاع از میزان خطای ناشی از جزءبندی در طول روند تحلیل می‌باشد. همچنین در روش اجزاء محدود، موقعیت مکانی خطای ایجادشده مشخص نیست. در سال‌های اخیر شاهد پیشرفت‌های قابل توجهی برای برطرف نمودن ضعف‌های روش اجزاء محدود بوده‌ایم. یکی از این روش‌ها استفاده از روش‌های پس‌پردازنده‌های خطا و اصلاح وفقی است.

علاقه و توجه به موضوع پس‌پردازشگرهای خطا در روش اجزاء محدود، با کار ابداعی از Babuska و Rheinboldt برای حل مسائل مقادیر مرزی بیضوی شروع شد. در فاصله زمانی ۱۹۸۳-۱۹۷۸ از کارهای این محققین تعدادی نتایج صریح در برآورد خطاها به دست آمد. استفاده از فرمول‌های انرژی مکمل توسط Veubeke نتوانست وجهه عمومی کسب کند. در سال ۱۹۸۴ کنفرانس مهمی پیرامون اصلاح وفقی و تخمین خطاها در لیسبون برگزار شد و در این کنفرانس روش‌های بازیافتی ارائه شده توسط دانشمندانی نظیر Bank, Demkowicz و Weiser با استقبال فراوانی روبرو شد. در اوایل دهه ۸۰ تحقیق و جستجو پیرامون روش‌های وفقی منجر به گستره وسیعی از خطاهای برآوردکننده‌ها گردید. در اواخر دهه ۸۰، Zienkiewicz و Zhu یک روش ساده به منظور برآورد خطا در تحلیل به روش اجزاء محدود ارائه نمودند. در اوایل دهه ۹۰، اساس تکنیک‌های پس‌پردازش خطا پایه‌گذاری شد و سپس به سوی گروه عمومی مسائل سوق داده شدند. اکثر روش‌های ارائه شده در این سال‌ها در مجموعه «روش‌های برپایه بازیافت» جای می‌گیرد. در روش‌های بازیافتی با استفاده از مفهوم نرم، گرادبان‌های ناشی از تحلیل به روش اجزاء محدود در هر کدام از اجزاء، با گرادبان‌های حقیقی که هموار هستند، مقایسه می‌شوند و از مقایسه آنها میزان خطا ارزیابی می‌شود. در اواخر دهه ۹۰، Zienkiewicz و Zhu روش خود را به روش

تکه بازیافتی فوق همگرا^۱ ارتقاء دادند (روش SPR) [۷] و [۸].

در سال ۱۹۹۷، برومند و Zienkiewicz بجای استفاده از تنش‌های نقاط فوق همگرایی در روش SPR، از تنش‌های نقاط گوسی استفاده نمودند و بجای استفاده از مفهوم نرم از مفهوم تعادل روی المان‌های متصل به آن گره سود بردند (روش REP) [۱] و [۲].

در حال حاضر موضوع پس‌پردازشگرهای خطا برای ارزیابی خطای ناشی از تحلیل به روش اجزاء محدود، به دوران بلوغ خود رسیده است و توجه بیشتر به سمت پیشرفت و توسعه روش‌های جدید و مشخص کردن محدوده‌های اجرایی آنها می‌باشد. نوشته‌ها درباره پس‌پردازشگرهای خطا برای تعیین میزان تقریب در تحلیل به روش اجزاء محدود بسیار وسیع است. هدف ما در این مقاله، ارائه یک حل بسته برای المان‌های مثلثی سه گرهی برای برآورد خطای ناشی از جزءبندی مسائل محیط‌های پیوسته جامد به روش قانون بازیافت گرادبان و اصلاح وفقی المان‌ها می‌باشد. بر اساس حل بسته ارائه شده، علاوه بر بر طرف نمودن ضعف‌های روش اجزاء محدود معمولی، ابزاری برای تشخیص مناسب بودن اندازه المان‌ها و میزان خطای صورت گرفته در فرایند جزء بندی معرفی می‌شود.

۲- معادلات اساسی

روابط حاکم بر معادله دیفرانسیل مربوط به یک مسئله الاستیسیته

خطی، در تحلیل به روش اجزاء محدود عبارتند از:

$$Lu + b \equiv S^T D S u + b = 0 \quad \text{on } \Omega \quad (1)$$

$$\text{on } \Gamma_u u = \bar{u} \quad (2)$$

$$G D s u = t = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (3)$$

$$\Gamma_u U \Gamma_t = \Gamma \quad (4)$$

$$u = u_h = N \bar{u} \quad (5)$$

$$\sigma_h = D \varepsilon_h = D B \bar{u} \quad (6)$$

$$\varepsilon_h = S u_h = S N \bar{u} = B \bar{u} \quad (7)$$

در روابط فوق:

$L =$ عملگر دیفرانسیلی خطی، $S =$ عملگر دیفرانسیلی کرنش، $D =$

ماتریس الاستیسیته، $u =$ جواب دقیق مسئله، $\bar{u} =$ تغییر مکان‌های گرهی

شبکه جزء بندی شده، $b =$ نیروهای حجمی اجزاء، $t =$ نیروهای سطحی

اجزاء، $u_h =$ جواب تقریبی مسئله یا جواب ناشی از حل اجزاء محدود، N

$=$ توابع شکلی، $\varepsilon_h =$ کرنش ناشی از حل اجزاء محدود، $\sigma_h =$ تنش ناشی از

حل اجزاء محدود، $B =$ ماتریس کرنش - تغییر مکان، $\Gamma =$ شرایط مرزی

و $\Omega =$ کل محیط.

با استفاده از اصل کار مجازی، سختی و بارهای گرهی معادل برای

هر کدام از اجزاء انتخابی طبق روابط زیر به دست می‌آیند.

$$K \bar{u} - f = 0 \quad (8)$$

$$K = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega \quad (9)$$

$$f = \int_{\Omega} N^T b d\Omega + \int_{\Gamma} N^T t d\Gamma \quad (10)$$

$$= \left[\int_{\Omega} \varepsilon^T \sigma d\Omega \right]^{1/2} \quad (25)$$

$$= \left[\int_{\Omega} \sigma^T D^{-1} \sigma d\Omega \right]^{1/2} \quad (26)$$

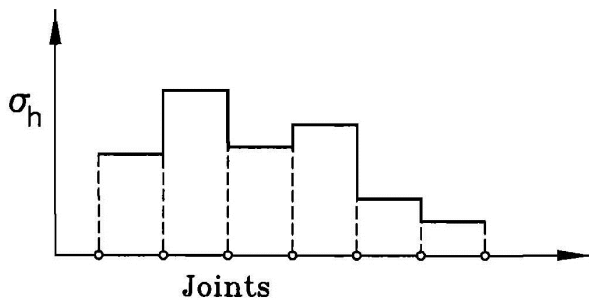
و مشابه با روابط فوق، نرم انرژی برای خطاها برای یک مسئله الاستیسیته خطی به کمک رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma - \sigma_h)^T D^{-1} (\sigma - \sigma_h) d\Omega \right]^{1/2} \quad (27)$$

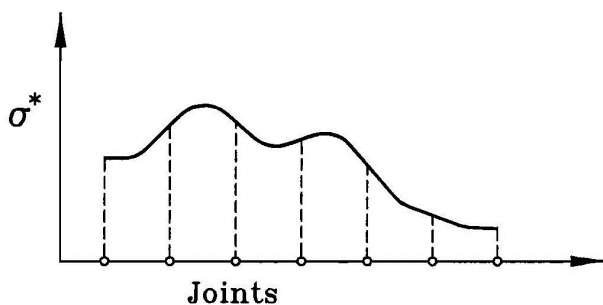
محاسبه خطا با استفاده از رابطه (28) در صورتی امکان‌پذیر است که دسترسی به جواب‌های دقیق مسئله وجود داشته باشد. اما از آنجایی که عموماً جواب‌های دقیق مسئله در ابتدا مشخص نیستند، بنابراین برای محاسبه میزان درصد خطای نسبی لازم است جواب‌های دقیق به نحو مناسبی تخمین زده شوند. یکی از روش‌های ساده و موثر برای دستیابی به جواب‌های دقیق مسئله و تخمین میزان خطا، قانون بازیافت گرادیان می‌باشد. قانون بازیافت گرادیان در بعضی از منابع به تصویر تنش یا روند بازیافت تغییرات تنش^۵ معروف است. اساس روش بازیافت گرادیان بدین صورت است که فرض می‌شود تنش‌های گرهی مجهول بوده و با $\bar{\sigma}$ نمایش داده می‌شوند. با داشتن تنش‌های گرهی، تنش‌های داخلی σ^* را می‌توان با استفاده از توابع شکلی مناسب N_p محاسبه نمود:

$$\sigma^* = N_{\sigma} \cdot \bar{\sigma} \quad (28)$$

مطالعات صورت گرفته در این خصوص نشان داده‌اند که، چنانچه توابع شکلی تنش (N_p)، همان توابع شکلی تغییر مکان‌ها (N) انتخاب شوند، توزیع تنش‌های داخلی از دقت بالاتری برخوردار خواهد بود. بنابراین رابطه (29) در خصوص تنش‌های هموارشده به شکل زیر تغییر



شکل ۱: نمودار تنش ناشی از روش اجزاء محدود برای قسمتی از یک محیط پیوسته



شکل ۲: نمودار تنش هموارشده با استفاده از روش بازیافت گرادیان برای قسمتی از یک محیط پیوسته

پس از سوار کردن ماتریس سختی کلیه المان‌ها و همچنین تشکیل بردار گرهی f ، با حل چند معادله چندمجهول مقادیر \bar{u} و u_h محاسبه می‌شوند و همچنین تنش ناشی از حل اجزاء محدود با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_h = DB\bar{u} \quad (11)$$

۳- مفهوم نرم و تخمین خطا

با توجه به اینکه روش اجزاء محدود صرفاً یک روش تقریبی برای حل دقیق محیط‌های پیوسته می‌باشد، بنابراین همواره بین جواب بدست آمده از روش اجزاء محدود و جواب دقیق، اختلاف وجود دارد. بنابراین اگر جواب‌های ناشی از حل اجزاء محدود با u_h و σ_h و جواب‌های دقیق مسئله با u و σ نمایش داده شوند، خطای مربوط به تغییر مکان و تنش در هر موقعیت مکانی مسئله به کمک روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$e_u = u - u_h \quad (12)$$

$$e_{\sigma} = \sigma - \sigma_h \quad (13)$$

عموماً برای دستیابی به یک معیار برای برآورد میزان خطای موجود در کل محیط، از مفهوم نرم استفاده می‌شود. برای پی‌بردن به مفهوم نرم ابتدا تعریف ضرب داخلی توابع $f(x)$ و $g(x)$ را روی بازه (a, b) به‌ازای تابع وزنی $w(x)$ در نظر می‌گیریم:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)W(x) \cdot \overline{g(x)} d\Omega \quad (14)$$

با ایده گرفتن از فضای سه بعدی و رابطه ضرب داخلی، مفهوم نرم (تعمیم مفهوم طول بردارها) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} \quad (15)$$

به‌ازای هر بردار f از فضای، شرایط اساسی نرم عبارتند از:

$$\|f\| \geq 0 \quad (16)$$

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad (17)$$

$$\|af\| = \|a\| \cdot \|f\| \quad (18)$$

$$f = 0 \Leftrightarrow \|f\| = 0 \quad (19)$$

بنابراین اگر مجدداً معادله دیفرانسیل (۱) را در نظر بگیریم:

$$Lu + b = 0 \quad \text{on } \Omega \quad (20)$$

طبق تعریف، نرم انرژی برای مسائل الاستیسیته با معادله رفتاری

فوق به کمک روابط زیر بیان می‌شود:

$$\|u\| = \left[\int_{\Omega} u^T Lu d\Omega \right]^{1/2} \quad (21)$$

$$= \left[\int_{\Omega} u^T (S^T DS) u d\Omega \right]^{1/2} \quad (22)$$

$$= \left[\int_{\Omega} (Su)^T D (Su) d\Omega \right]^{1/2} \quad (23)$$

$$= \left[\int_{\Omega} \varepsilon^T D \varepsilon d\Omega \right]^{1/2} \quad (24)$$

می‌یابد.

$$\sigma^* = N \cdot \bar{\sigma} \quad (29)$$

مطابق قانون بازیافت گرادیان، برای محاسبه تنش‌های هموارشده می‌توان به شرح زیر از مفهوم نُرْم برای تنش‌های محاسبه شده از روش اجزاء محدود و تنش‌های هموارشده بهره برد.

$$F(\bar{\sigma}) = \langle \sigma^*, \sigma_h \rangle = \int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma_h)^2 d\Omega \quad (30)$$

$$F(\bar{\sigma}) = \int_{\Omega} (N \bar{\sigma} - \sigma_h)^2 d\Omega \quad (31)$$

$$\partial F(\bar{\sigma}) / \partial \bar{\sigma} = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} N^T \cdot (N \bar{\sigma} - \sigma_h) d\Omega = 0 \quad (32)$$

$$\int_{\Omega} N^T \cdot N \bar{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} N^T \cdot \sigma_h d\Omega \quad (33)$$

$$[\int_{\Omega} N^T \cdot N d\Omega] \cdot \bar{\sigma} = \int_{\Omega} N^T \cdot \sigma_h d\Omega \quad (34)$$

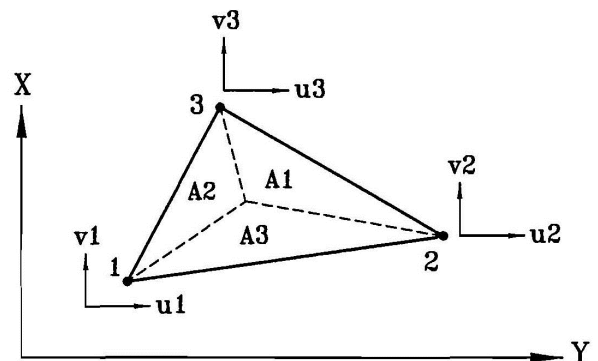
رابطه (۳۵) را می‌توان به صورت‌های زیر نیز نشان داد:

$$M \cdot \bar{\sigma} = P \quad (35)$$

$$M = \int_{\Omega} N^T \cdot N d\Omega \quad (36)$$

$$P = \int_{\Omega} N^T \cdot \sigma_h d\Omega \quad (37)$$

با توجه به اینکه المان‌های مورد استفاده در این پژوهش از نوع مثلثی سه گرهی اختیار شده‌اند، بنابراین پارامترهای بکار رفته در این نوع المان‌ها را می‌توان از حل بسته به دست آورد.



شکل ۳: مختصات طبیعی برای یک جزء مثلثی سه گرهی

مطابق شکل (۳)، توابع شکلی جزء مثلثی سه گرهی بصورت روابط

زیر تعریف می‌شوند:

$$L_1 = \frac{A1}{A}, \quad L_2 = \frac{A2}{A}, \quad L_3 = \frac{A3}{A} \quad (38)$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (39)$$

$$N = \{ L_1 \quad L_2 \quad L_3 \} \quad (40)$$

$$\sigma_h = \begin{Bmatrix} \sigma_{xh} \\ \sigma_{yh} \\ \sigma_{xyh} \end{Bmatrix} = \text{constant} \quad (41)$$

چنانچه مختصات سراسری x و y برحسب مختصات محلی نوشته

شوند، روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$x = \sum N_i x_i \Rightarrow x = L_1 \cdot x_1 + L_2 \cdot x_2 + L_3 \cdot x_3 \quad (42)$$

$$y = \sum N_i y_i \Rightarrow y = L_1 \cdot y_1 + L_2 \cdot y_2 + L_3 \cdot y_3 \quad (43)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$= \frac{1}{2} [(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) + (y_1 x_2 + y_2 x_3 + y_3 x_1)] \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (46)$$

از معکوس کردن ماتریس بالا و حل معادله برای L_1 و L_2 و L_3 روابط زیر بدست می‌آید:

$$L_1 = \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \quad (47)$$

$$L_2 = \frac{1}{2A} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (48)$$

$$L_3 = \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \quad (49)$$

از طرفی میدان تغییرمکان برای یک جزء مثلثی عبارت است از:

$$u = \sum N_i u_i \Rightarrow u = L_1 \cdot u_1 + L_2 \cdot u_2 + L_3 \cdot u_3 \quad (50)$$

$$v = \sum N_i v_i \Rightarrow v = L_1 \cdot v_1 + L_2 \cdot v_2 + L_3 \cdot v_3 \quad (51)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (52)$$

و میدان کرنش:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = B \cdot \bar{u} \quad (53)$$

$$\{P_x\}_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \times \sigma_{xh} \times \frac{Ai}{3} \quad (63)$$

$$\{P_y\}_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \times \sigma_{yh} \times \frac{Ai}{3} \quad (64)$$

$$\{P_{xy}\}_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \times \sigma_{xyh} \times \frac{Ai}{3} \quad (65)$$

پس از تشکیل ماتریس $[M]_i$ و بردارهای $\{P_x\}_i$ ، $\{P_y\}_i$ و $\{P_{xy}\}_i$ برای کلیه اجزاء و جمع کردن آنها با هم، از حل چند معادله چند مجهول مقادیر $\bar{\sigma}_x$ ، $\bar{\sigma}_y$ و $\bar{\sigma}_{xy}$ برای کلیه گره‌ها به شرح زیر محاسبه می‌شوند:

$$[M] \cdot \{\bar{\sigma}_x\} = \{P_x\} \Rightarrow \{\bar{\sigma}_x\} = [M]^{-1} \cdot \{P_x\} \quad (66)$$

$$[M] \cdot \{\bar{\sigma}_y\} = \{P_y\} \Rightarrow \{\bar{\sigma}_y\} = [M]^{-1} \cdot \{P_y\} \quad (67)$$

$$[M] \cdot \{\bar{\sigma}_{xy}\} = \{P_{xy}\} \Rightarrow \{\bar{\sigma}_{xy}\} = [M]^{-1} \cdot \{P_{xy}\} \quad (68)$$

بنابراین، بر اساس قانون بازیافت گرادیان و مفهوم تعادل، میزان خطا در نرم انرژی عبارت خواهد از:

$$\|u^*\| = \left[\int_{\Omega} \sigma^{*T} D^{-1} \sigma^* d\Omega \right]^{1/2} \quad (69)$$

$$\|e^*\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma_h)^T D^{-1} (\sigma^* - \sigma_h) d\Omega \right]^{1/2} \quad (70)$$

$$\eta = \left[\frac{\|e^*\|^2}{\|u^*\|^2 + \|e^*\|^2} \right]^{1/2} \times 100\% \quad (71)$$

چنانچه خطای نسبی قابل قبول در یک مسئله سازه‌ای با $\bar{\eta}$ نمایش داده شود، شرط یک حل قابل قبول توسط روش اجزاء محدود (F.E.M) این است که:

$$\eta < \bar{\eta} \quad (72)$$

مقدار $\bar{\eta}$ معمولاً در کارهای عملی کمتر از ۱۰ درصد در نظر گرفته می‌شود. چنانچه $\eta < \bar{\eta}$ باشد، خطای رخ داده بیش از مقدار مجاز بوده و برای رسیدن به جواب قابل قبول باید شبکه جزء بندی شده اصلاح گردد.

۴- اصلاح وقتی با استفاده از تخمین خطای موضعی

در بخش‌های قبلی با استفاده از قانون بازیافت گرادیان و تعمیم مفهوم ضرب داخلی به نرم، خطای نسبی سراسری (η) محاسبه شد. برای دستیابی به خطای مجاز، اولین راه‌حلی که به نظر می‌رسد کوچکتر نمودن اندازه کلیه المان‌ها تا رسیدن به معیار $\eta < \bar{\eta}$ می‌باشد. راه‌حل فوق یک

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x \end{Bmatrix} \quad (54)$$

با استفاده از قانون مشتق‌گیری، ماتریس B در معادلات اساسی از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$[B] = \frac{1}{2A} \times \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (55)$$

و میدان تنش:

$$\sigma = D \epsilon = DB \bar{u} \quad (56)$$

$$\begin{pmatrix} [D] \\ \text{plane stress} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\begin{pmatrix} [D] \\ \text{plane strain} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

با توجه به اینکه ماتریس [B] برای جزء مثلثی سه گرهی ثابت است، بنابراین برای محاسبه ماتریس سختی جزء مثلثی نیازی به انتگرال‌گیری عددی نبوده و می‌توان با استفاده از حل بسته، ماتریس سختی و بردار بارهای گرهی را از روابط زیر به دست آورد:

$$K = \int_{\Omega} B^T DB d\Omega \quad (59)$$

$$f = \int_{\Omega} N^T Db d\Omega + \int_{\Gamma} N^T t d\Gamma \quad (60)$$

لازم به یادآوری است که انتگرال چندجمله‌ای برحسب a و b و c از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\int_A L_1^a \cdot L_2^b \cdot L_3^c dA = \frac{a! \cdot b! \cdot c!}{(2+a+b+c)} \times 2A \quad (61)$$

سهولت انجام انتگرال فوق، یکی از فواید اولیه استفاده از مختصات سطحی بدون بُعد است.

از آنجایی که تنش‌های $\bar{\sigma}_x$ و $\bar{\sigma}_y$ و $\bar{\sigma}_{xy}$ مستقل از یکدیگر هستند، بنابراین محاسبات را می‌توان بطور مجزا برای $\bar{\sigma}_x$ و $\bar{\sigma}_y$ و $\bar{\sigma}_{xy}$ انجام داد. بنابراین براساس توابع شکلی ارائه شده، ماتریس M و بردار P با استفاده از روابط زیر قابل محاسبه هستند:

$$[M]_i = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \frac{Ai}{12} \quad (62)$$

و (p) صورت می‌گیرد.

هر کدام از روش‌های اصلاحی فوق می‌تواند بصورت‌های مختلف زیر صورت گیرد:

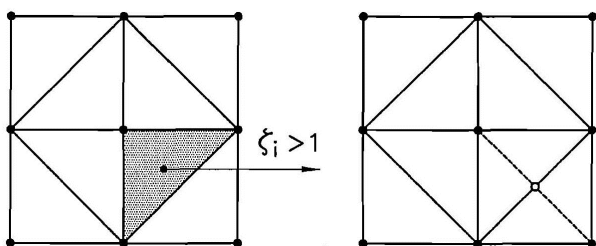
- اصلاح با استفاده از شبکه جزء بندی غنی شده؛
- اصلاح با استفاده از شبکه جزء بندی خودکار؛

در روش‌های اصلاحی با استفاده از شبکه جزء بندی غنی‌شده، ساختار جزء بندی اولیه حفظ شده و عملیات اصلاحی بر روی المان‌هایی که خطای نسبی غیر قابل قبولی دارند، صورت می‌گیرد. اما در روش‌های اصلاحی با استفاده از شبکه جزء بندی خودکار، ساختار جزء بندی اولیه تغییر یافته و یک شبکه جزء بندی جدید متناسب با خطای نسبی موضعی طراحی می‌شود.

در این پژوهش، برای محاسبه خطای ناشی از جزء بندی و رسیدن به یک شبکه جزء بندی معقول، از روش اصلاحی نوع h با استفاده از شبکه جزء بندی غنی‌شده، استفاده شده است. تحقیقات صورت گرفته بر روی روش اصلاحی نوع h عموماً بر روی المان‌های مستطیلی (۴ گرهی) صورت گرفته است، اما در این پژوهش بدلیل وجود حل‌های بسته برای المان‌های مثلثی (۳ گرهی)، از این نوع المان استفاده شده است.

بطور کلی ساختار روش اصلاحی نوع h با استفاده از شبکه جزء بندی غنی‌شده، بشرح زیر تشکیل شده است:

- ابتدا مسئله مورد نظر با استفاده از روش اجزاء محدود و با المان‌های مثلثی سه گرهی تحلیل می‌شود.
- براساس روابط ارائه شده در بخش‌های قبلی این مقاله، به کمک حل‌های بسته، مقادیر خطای نسبی سراسری (η) و خطای نسبی موضعی (ξ_i) محاسبه می‌شوند.
- با استفاده از نرم‌افزارهای تهیه شده در این خصوص، اجزایی که در آنها، $\xi_i > 1$ هستند، با ایجاد یک گره اضافی در وسط ضلع بزرگتر به دو جزء تقسیم می‌شوند. در فرایند تقسیم المان‌ها، ممکن است به واسطه گره اضافی در وسط ضلع بزرگتر یک جزء سه گرهی، المان مثلثی دیگر و متصل به آن ضلع نیز به اجبار به دو جزء تقسیم گردد (شکل ۴).
- شبکه جزء بندی اصلاح شده جدید را مجدداً با استفاده از روش اجزاء محدود تحلیل نموده و به گام b برمی‌گردیم و این عمل را آنقدر ادامه می‌دهیم تا اینکه ξ_i کلیه اجزاء کوچکتر از یک گردد.
- چنانچه ξ_i کلیه اجزاء کوچکتر از یک باشند، حل متوقف می‌شود



شکل ۴: ایجاد گره اضافی در شبکه جزء بندی غنی‌شده

راه‌حل غیراقتصادی بوده و علاوه بر ضعف‌های اشاره شده در بخش قبلی این مقاله، موجب می‌شود که حجم مسئله بسیار بزرگ شده و بعضاً حل آنها غیرممکن شود. راه‌حلی که به نظر می‌آید از کارایی بیشتری برخوردار باشد و موجب کمترین افزایش حجم مسئله گردد، کوچکتر نمودن موضعی اندازه المان‌ها می‌باشد. یعنی در المان‌هایی که در آنها خطای بیش از خطای مجاز می‌باشد، عملیات اصلاحی اعمال شود و در جاهائیکه خطای اتفاق افتاده کمتر از خطای مجاز می‌باشد، اندازه المان‌ها دست نخورده باقی بماند. این روش به اصلاح وفقی معروف است. بنابراین در روش اصلاح وفقی، نیازمند پارامتری هستیم که بتوان به کمک آن خطای موضعی کلیه المان‌ها را محاسبه نمود. این پارامتر به ξ_i معروف است.

در اکثر تحقیقات صورت گرفته در زمینه اصلاح وفقی، پارامتر ξ_i بر پایه این اصل که در یک شبکه جزء بندی شده معقول، خطای نسبی سراسری (η) بطور یکنواخت بین کلیه المان‌ها توزیع می‌شود، محاسبه می‌شود. براساس اصل فوق پارامتر ξ_i را می‌توان با استفاده از روابط زیر محاسبه نمود:

$$\|e^*\|^2 = \sum_{i=1}^m \|e_i^*\|^2 \quad (73)$$

$$\|e^*\|^2 = m \cdot \|e_i^*\|^2 \quad (74)$$

$$\eta = \left[\frac{m \cdot \|e_i^*\|^2}{\|u^*\|^2 + \|e^*\|^2} \right]^{1/2} \times 100\% \quad (75)$$

$$\eta = \bar{\eta} \Rightarrow \|e_i^*\| = \|e_{per}^*\| \quad (76)$$

که در آن $\|e_{per}^*\|$ خطای مجاز هر جزء می‌باشد. چنانچه روابط (75) و (76) با هم ترکیب شوند، روابط زیر حاصل می‌شوند.

$$(\bar{\eta})^2 = \frac{m \cdot \|e_{per}^*\|^2}{\|u^*\|^2 + \|e^*\|^2} \quad (77)$$

$$\|e_{per}^*\| = \frac{\bar{\eta}}{\sqrt{m}} \left[\|u^*\|^2 + \|e^*\|^2 \right]^{1/2} \quad (78)$$

براساس روابط فوق ξ_i با استفاده از رابطه زیر تعیین می‌گردد:

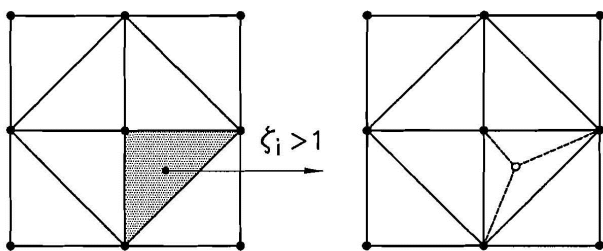
$$\xi_i = \frac{\|e_i^*\|}{\|e_{per}^*\|} \quad (79)$$

بنابراین به عنوان یک معیار، چنانچه $\xi_i > 1$ باشد، خطای جزء مورد نظر (ξ_i) قابل قبول بوده و چنانچه $\xi_i < 1$ باشد، خطای جزء فوق بیش از مقدار مجاز خواهد بود.

عملیات اصلاحی موضعی شبکه جزء بندی شده عموماً براساس یکی از روش‌های نوع h (تقسیم کردن المان‌هایی که خطای بیشتری دارند به المان‌های با اندازه کوچک‌تر)، نوع p (بالا بردن درجه چندجمله‌ای توابع شکلی المان‌هایی که خطای بیشتری دارند) و نوع h-p (ترکیبی از نوع h

تقسیم شود. برای مثال فرض می‌نمائیم که در شکل (د) جزء شماره ۲ نیاز به تقسیم آن نباشد اما اجزاء ۱ و ۳ نیاز به اصلاح داشته باشند، همچنین فرض می‌کنیم که ضلع بزرگتر اجزاء ۱ و ۳ به جزء شماره ۲ متصل می‌باشد، بنابراین براساس گام (c)، جزء شماره ۲ هرچند نیازی به تقسیم آن نبود ولی به واسطه اجزاء ۱ و ۳ باید حداقل به سه جزء تقسیم شود.

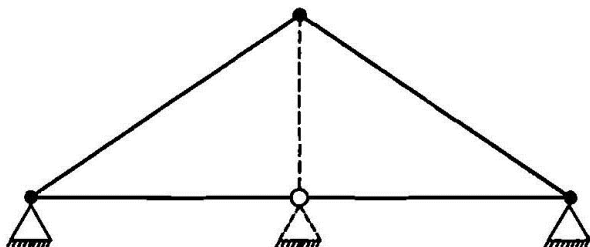
i- در این پژوهش بجای معیار اشاره شده در گام (c)، معیار دیگری نیز مورد مطالعه قرار گرفت و نتایج نسبتاً قابل قبولی از آن حاصل گردید. در این معیار بجای ایجاد گره اضافی در وسط ضلع بزرگتر، یک گره اضافی در مرکز جزء سه گرهی ایجاد می‌شود و جزء مورد نظر به سه جزء تقسیم می‌شود. نامتناسب بودن اضلاع اجزاء بدست



شکل ۶: ایجاد گره اضافی در مرکز المان مثلثی در شبکه جزءبندی غنی‌شده

آمده از معایب این معیار و عدم مزاحمت برای المان‌های متصل به این المان (اصلاح اجباری المان‌های متصل به این المان) از مزایای این معیار محسوب می‌شود. در مثال عددی ارائه شده در این مقاله از این معیار استفاده نشده است (شکل ۶).

j- چنانچه دو گره از سه گره یک المان سه گرهی (مثلثی) دارای تکیه‌گاه باشد و مقدار ξ_i در آن المان بیش از یک باشد و یا براساس یکی از معیارهای اشاره شده در بندهای فوق نیاز به اصلاح داشته باشد، نکته‌ای که باید به آن توجه شود آن است که چنانچه گره اضافی در وسط ضلع متصل به گره‌های دارای تکیه‌گاه باشد، درجات آزادی گره اضافی تعریف شده نیز باید مشابه گره‌های دارای تکیه‌گاه، مقید شوند.



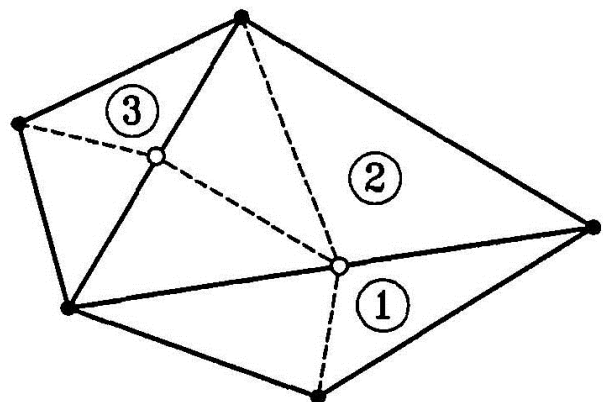
شکل ۷: مقید نمودن درجات آزادی گره اضافی تعریف شده در روند تقسیم اجزاء

و کلیه تلاش‌های داخلی را می‌توان محاسبه نمود. در این پژوهش، در طول روند اصلاحی از نوع نگارش h با استفاده از شبکه جزء بندی غنی‌شده، نکات زیر مورد توجه قرار گرفته است.

f- در مطالعات پارامتریک براساس روش گام به گام (a تا e)، مشاهده گردید که به واسطه تقسیم المان‌ها به اندازه کوچکتر، تناسبات بعضی از المان‌ها نامناسب می‌باشد. برای این منظور به معیار تقسیم المان در گام (c) این معیار نیز اضافه شد که چنانچه نسبت ضلع بزرگ المان سه گرهی به ارتفاع آن از یک عدد ثابت به دلخواه کاربر (مثلاً ۵) بزرگتر باشد، آن المان نیز به دو جزء تقسیم شود.

g- در روش اصلاحی از نوع h با استفاده از شبکه جزء بندی غنی‌شده، چنانچه در شروع حل مسئله، اندازه المان‌ها بطور صحیح انتخاب نشده باشند (که اکثراً اینگونه می‌باشد) ممکن است مقدار X در بعضی از المان‌ها خیلی کمتر از یک و در بعضی از المان‌ها نزدیک یک و در بعضی دیگر بسیار بزرگتر از یک باشد. بنابراین برای اینکه تابع تقسیم اندازه المان‌ها در یک روند اصلاحی، دارای توزیع یکنواختی باشد، در معیار تقسیم اندازه المان‌ها این توانایی نیز پیش‌بینی گردید که در تحلیل‌های اولیه بجای اینکه مقدار ξ_i با عدد یک مقایسه شود، با یک عدد بزرگتری مقایسه شود و به ترتیب که تعداد تحلیل‌های مسئله افزایش می‌یابد، مقدار ξ_i نیز به سمت عدد یک میل کند، بطوری که در تحلیل آخری باید مقدار ξ_i در کلیه المان‌ها از عدد یک کوچکتر باشد. مطالعات پارامتریک در این زمینه نشان داد که روش فوق از کارایی بیشتری برخوردار است.

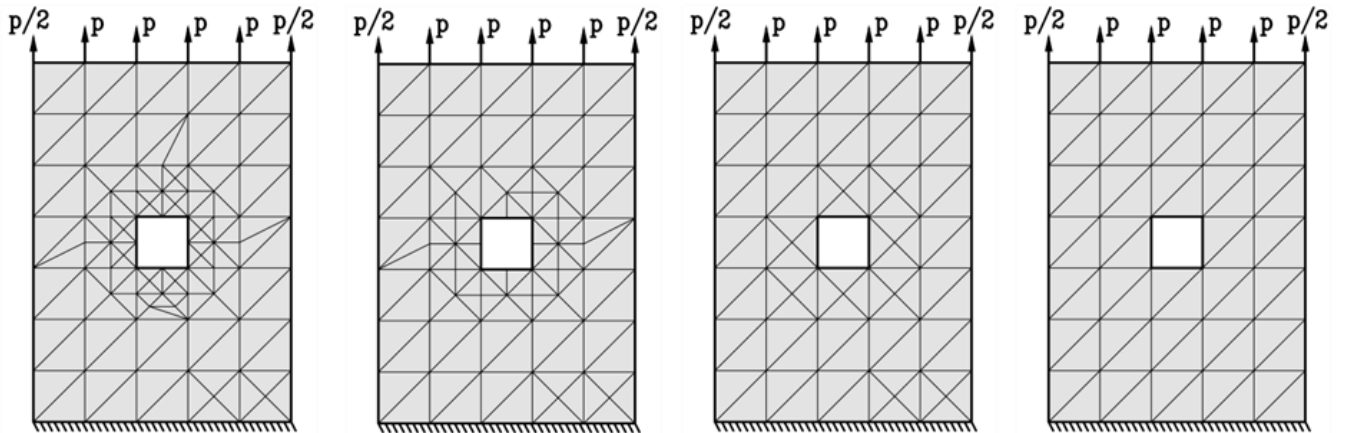
h- همانگونه که در گام (c) نیز اشاره شد، ممکن است به واسطه گره اضافی در وسط ضلع بزرگتر یک جزء، بعضی از اجزاء دیگر نیز اجباراً به دو جزء تقسیم شوند. یک حالت خاصی نیز وجود دارد که ممکن است یک جزء هر چند به خودی خود نیاز به تقسیم آن به اجزاء کوچکتر نباشد، اما به واسطه اجزاء متصل به آن به بیش از دو جزء



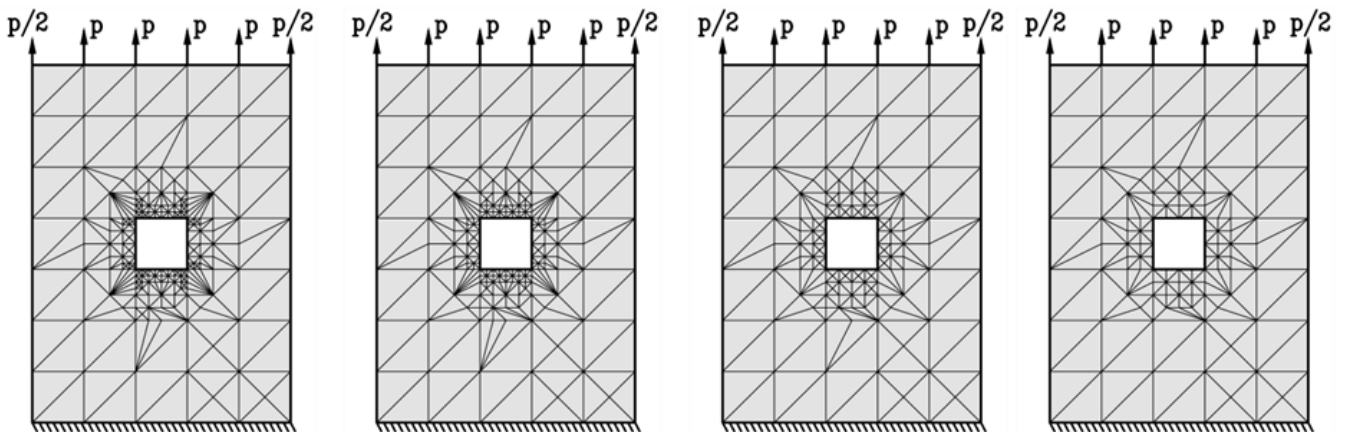
شکل ۸: تقسیم اجباری جزء شماره ۲ به بیش از دو جزء

۵- مثال عددی ۱:

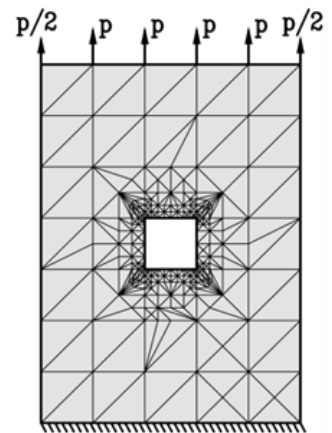
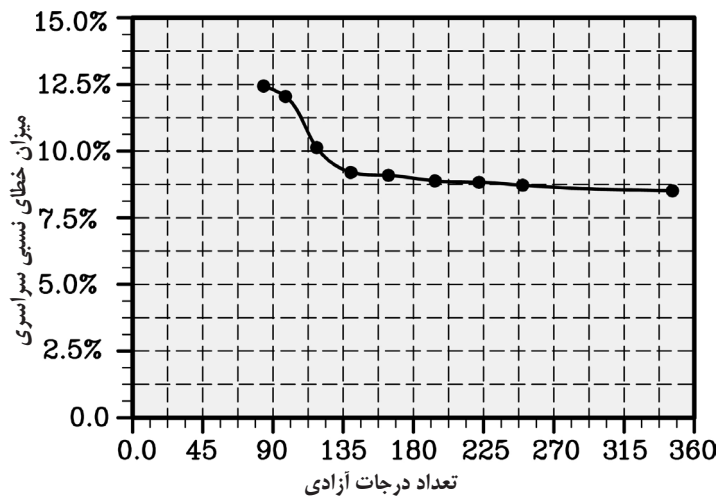
نمایش روند اصلاحی برای یک مسئله الاستیسیته و یک سوراخ مربع شکل در وسط آن و با شرایط بارگذاری زیر:



(الف) شبکه جزء بندی (۱) تعداد درجات آزادی = ۸۴ $\eta = 12.44\%$
 (ب) شبکه جزء بندی (۲) تعداد درجات آزادی = ۹۸ $\eta = 12.05\%$
 (پ) شبکه جزء بندی (۳) تعداد درجات آزادی = ۱۱۸ $\eta = 10.13\%$
 (ت) شبکه جزء بندی (۴) تعداد درجات آزادی = ۱۴۰ $\eta = 9.20\%$



(ث) شبکه جزء بندی (۵) تعداد درجات آزادی = ۱۶۴ $\eta = 9.09\%$
 (ج) شبکه جزء بندی (۶) تعداد درجات آزادی = ۱۹۴ $\eta = 8.88\%$
 (چ) شبکه جزء بندی (۷) تعداد درجات آزادی = ۲۲۲ $\eta = 8.83\%$
 (ح) شبکه جزء بندی (۸) تعداد درجات آزادی = ۲۵۰ $\eta = 8.72\%$



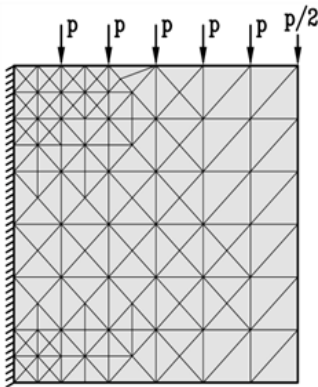
(خ) شبکه جزء بندی (۹) تعداد درجات آزادی = ۳۴۶ $\eta = 8.51\%$

(د) منحنی میزان خطای نسبی سراسری بر حسب تعداد درجات آزادی در مراحل مختلف اصلاح وقتی

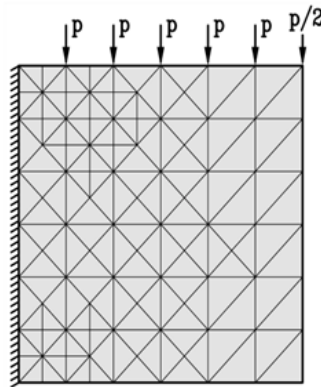
شکل ۸: کاربرد شبکه جزء بندی غنی شده در اصلاح وقتی برای یک صفحه سوراخ دار

۶- مثال عددی ۲:

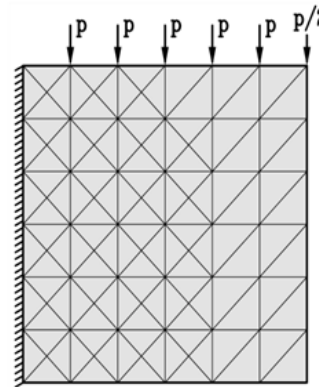
نمایش روند اصلاحی برای یک صفحه طره‌ای و با شرایط بارگذاری زیر:



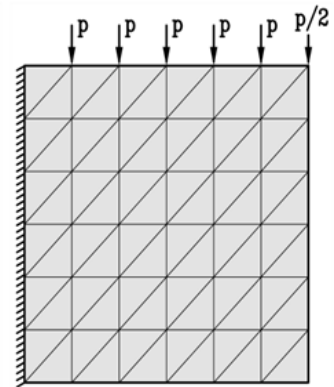
(الف) شبکه جزء بندی (۱)
تعداد درجات آزادی = ۸۴
 $\eta = 23.94\%$



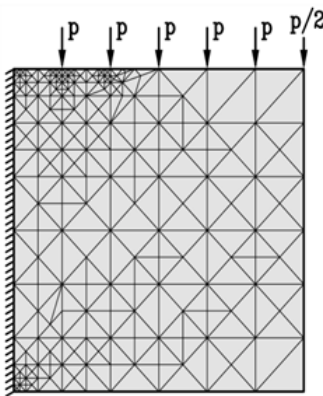
(ب) شبکه جزء بندی (۲)
تعداد درجات آزادی = ۱۳۰
 $\eta = 15.71\%$



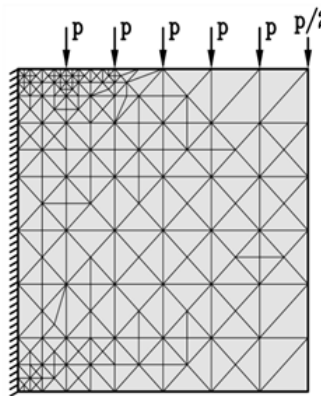
(پ) شبکه جزء بندی (۳)
تعداد درجات آزادی = ۱۶۴
 $\eta = 15.58\%$



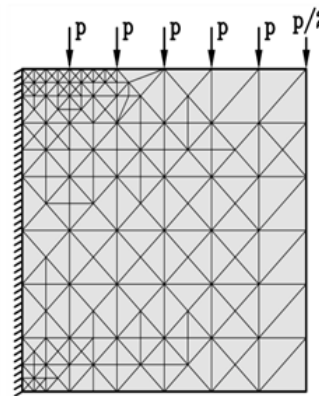
(ت) شبکه جزء بندی (۴)
تعداد درجات آزادی = ۲۰۲
 $\eta = 13.58\%$



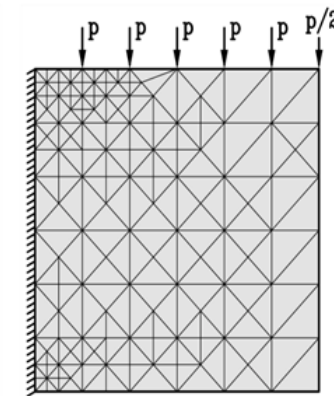
(ث) شبکه جزء بندی (۵)
تعداد درجات آزادی = ۲۵۲
 $\eta = 13.25\%$



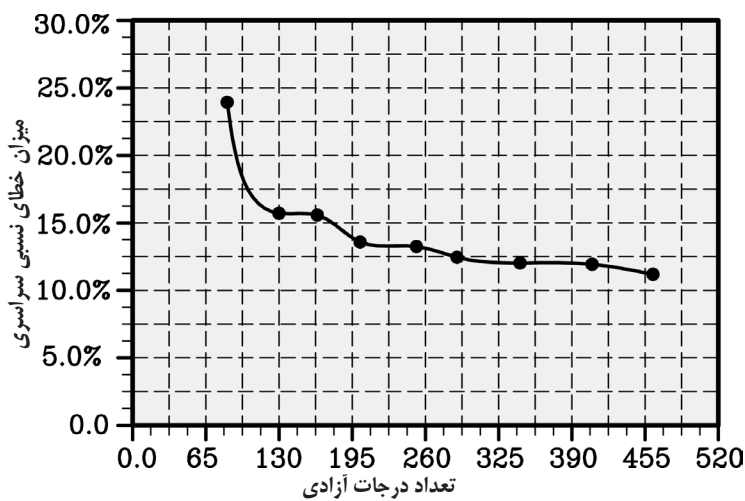
(ج) شبکه جزء بندی (۶)
تعداد درجات آزادی = ۲۸۸
 $\eta = 12.45\%$



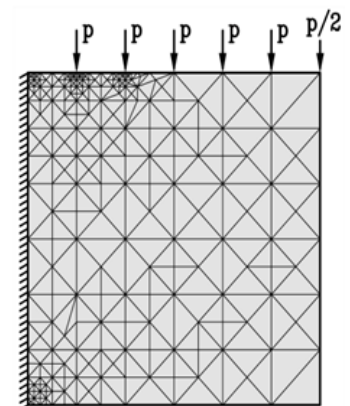
(چ) شبکه جزء بندی (۷)
تعداد درجات آزادی = ۳۴۴
 $\eta = 12.03\%$



(ح) شبکه جزء بندی (۸)
تعداد درجات آزادی = ۴۰۸
 $\eta = 11.93\%$



(د) منحنی میزان خطای نسبی سراسری بر حسب تعداد درجات آزادی در مراحل مختلف اصلاح و فقی



(خ) شبکه جزء بندی (۹)
تعداد درجات آزادی = ۴۶۲
 $\eta = 11.1\%$

شکل ۹: کاربرد شبکه جزء بندی غنی شده در اصلاح و فقی برای یک صفحه طره‌ای

۷- بحث

انتهای هر گام بارگذاری می‌تواند بر اساس یکی از معیارهای زیر صورت گیرد.

- دستور توقف پس از حصول $\eta < \bar{\eta}$ در انتهای هر گام بارگذاری؛
- دستور توقف پس از حصول $\xi > 1$ برای کلیه المان‌ها؛
- دستور توقف پس از اصلاح وفقی به تعداد مشخص در انتهای هر گام بارگذاری؛

البته ناگفته نماند که در اینگونه تحلیل‌ها فرض بر این است که کاربر توانایی انتخاب تعداد مناسب گام‌های بارگذاری و نیز تعداد تکرار مناسب در هر گام بارگذاری را دارد. چنانچه کاربر هیچگونه اطلاعی از حدود بار نهایی نداشته باشد، می‌تواند از تحلیل مسئله با تعداد المان‌های کمتر و نیز با تعداد اصلاح وفقی کمتر به تعداد مناسب گام‌های بارگذاری و نیز تعداد تکرار مناسب در هر گام بارگذاری دست پیدا کند. همچنین در روش بکار گرفته شده در این پژوهش، گاهی مواقع ممکن است کوچکتر شدن بیش از اندازه المان‌ها بخصوص در نواحی تمرکز تنش موجب بروز خطاهای عددی شود. برای غلبه بر این مشکل در فرایند اصلاح وفقی می‌توان معیار دستور عدم کوچکتر نمودن المان‌های دارای اندازه مورد نظر را به برنامه اضافه نمود تا از این طریق از بروز خطاهای عددی اجتناب شود.

۸- نتیجه گیری

در این پژوهش ابتدا روش اجزاء محدود به عنوان یک ابزار قوی برای محدوده وسیعی از مسائل مهندسی معرفی شد. اما روش اجزاء محدود، محدودیت‌هایی دارد که بطور خلاصه می‌توان به عدم آگاهی از مناسب بودن اندازه المان در تحلیل و عدم اطلاع از میزان خطای ناشی از جزءبندی در طول روند تحلیل اشاره نمود. برای این منظور روش اجزاء محدود وفقی به عنوان یک ابزار قوی برای غلبه بر محدودیت‌های فوق، معرفی گردید. برتری‌های روش اجزاء محدود وفقی نسبت به روش اجزاء محدود معمولی عبارتند از:

- محاسبه خطای سراسری (η) براساس قانون بازیافت گرادبان؛
- محاسبه خطای نسبی موضعی ξ برای کلیه المان‌ها؛
- اصلاح وفقی شبکه جزء بندی شده؛
- ارائه ابزاری برای کنترل صحت تحلیل؛
- دستیابی به جواب قابل قبول با تعداد المان‌های کمتر و در نتیجه کاهش قابل ملاحظه زمان مورد نیاز برای تحلیل مسئله؛
- هوشمند بودن روش اصلاح وفقی در افزایش تعداد درجات آزادی برای رسیدن به جواب قابل قبول؛

بر اساس نتایج این پژوهش می‌توان گفت که انتخاب نوع نرم (نرم انرژي، نرم L_2 برای تنش و نرم L_2 برای کرنش) تاثیر قابل ملاحظه‌ای در افزایش تعداد درجات آزادی و نیز میزان خطای بدست آمده نداشته و از هر سه نرم تقریباً جواب یکسانی حاصل می‌شود.

در این پژوهش، برای اصلاح شبکه جزءبندی شده، از روش اصلاحی نوع h با شبکه جزءبندی غنی شده استفاده شده است. در روش اصلاحی از نوع h با استفاده از شبکه جزءبندی غنی شده، شبکه جزءبندی اولیه حفظ شده و عملیات اصلاحی به طور موضعی صورت می‌گیرد. برتری روش اصلاحی نوع h با شبکه جزءبندی غنی شده نسبت به سایر روش‌ها، دستیابی آسان به جواب قابل قبول می‌باشد، بطوریکه برای شروع روند حل می‌توان فقط از یک عدد المان سود برده و پس از چندین بار تکرار توسط نرم افزار تهیه شده در این پژوهش به یک شبکه جزءبندی معقول و نهایتاً جواب مورد نظر دست یافت.

در مثال عددی ۱، با انتخاب ۸۴ درجه آزادی، خطای سراسری (η) برابر ۱۲/۴۴ درصد بدست آمد و پس از ۸ مرتبه اصلاح وفقی این میزان خطا با افزایش هدفدار تعداد درجات آزادی به ۸/۵ درصد رسید. در صورتی که برای حصول این میزان خطا اگر از المان‌های با اندازه یکسان استفاده می‌شد، مسلماً به تعداد درجات آزادی بسیار بیشتری نسبت به روش اصلاح وفقی نیاز می‌بود. همچنین در مثال عددی ۲، با انتخاب ۸۴ درجه آزادی، خطای سراسری (η) برابر ۲۳/۹۴ درصد بدست آمد و پس از ۸ مرتبه اصلاح وفقی این میزان خطا با افزایش هدفدار تعداد درجات آزادی به ۱۱/۱۹ درصد رسید. در صورتی که در این مثال نیز برای حصول این میزان خطا اگر از المان‌های با اندازه یکسان بهره گرفته می‌شد، مسلماً به تعداد درجات آزادی بسیار بیشتری نسبت به روش اصلاح وفقی نیاز می‌بود.

نتایج مثال‌های عددی ۱ و ۲ حاکی از آن است که بکارگیری روش اصلاح وفقی از جهات مختلفی اهمیت دارد که بطور خلاصه می‌توان به هوشمند بودن این روش در افزایش تعداد درجات آزادی هدفدار، ارائه ابزاری برای کنترل صحت تحلیل در فرایند اصلاح وفقی و دستیابی به جواب قابل قبول با تعداد درجات آزادی کمتر و در نتیجه کاهش قابل ملاحظه زمان مورد نیاز برای تحلیل مسئله اشاره نمود.

روش بکار گرفته شده در این پژوهش قابلیت فرموله کردن برای مسائل غیر الاستیک را نیز دارد. تنها پرسشی که در تحلیل مسائل غیر الاستیک مطرح است، این است که، روش اصلاح وفقی در چه موقعیت زمانی از تحلیل غیرالاستیک اعمال شود. برای پاسخ به این پرسش دو گزینه زیر مطرح است:

- اعمال روش اصلاح وفقی در انتهای هر تکرار از تحلیل؛
- اعمال روش اصلاح وفقی در انتهای هر گام بارگذاری از تحلیل غیر الاستیک؛

اما از آنجائیکه در انتهای هر تکرار از تحلیل، نیروهای داخلی با نیروهای خارجی متعادل نیستند، بنابراین اعمال روش اصلاح وفقی در انتهای هر تکرار از تحلیل منتفی است و بهترین موقعیت زمانی برای اعمال روش اصلاح وفقی در تحلیل‌های غیرالاستیک، انتهای هر گام بارگذاری می‌باشد. در اینگونه تحلیل‌ها توقف عملیات اصلاح وفقی در

- superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 110, pp. 207- 224, 1992.
- [11] Ainsworth, M. and Tisley Oden, J., “A-Posteriori error estimation in finite element analysis”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 142, pp. 1- 88, 1997.
- [12] Ainsworth, M. and Zhu, J. Z. and Craig, A. W. and Zienkiewicz, O. C., “Analysis of the Zienkiewicz-Zhu a-posteriori estimator in the finite element method”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 28, pp. 2161- 2174, 1989.
- [13] Asghari, A., “Determination of ultimate load and possible failure lines for continous media using adaptive finite element method”, Ph.D. Thesis, Tehran university, Tehran, Iran, 2001.
-
- ۱۰- واژه‌نامه
- ۱- قانون بازیافت گرادیان
Role of Gradient Recovery
- ۲- اصلاح وقتی
Adaptive Refinement
- ۳- اصلاح وقتی از نوع نگارش h
h-refinement Adaptivity
- ۴- تکه‌های فوق همگرا
Superconvergent Path Recovery
- ۵- تصویر تنش یا روند بازیافت تغییرات تنش
Project or Variational Recovery Process
- ۶- اصلاح با استفاده از شبکه جزء بندی غنی شده
Enrichment Mesh Generation
- ۷- اصلاح با استفاده از شبکه جزء بندی خودکار
Automatic Mesh Generation
- [1] Boroomand, B. and Zienkiewicz, O. C., “Recovery by equilibrium in patches (REP)”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 40, pp. 137- 164, 1997.
- [2] Boroomand, B. and Zienkiewicz, O. C., “An improved REP recovery and the efectivity robustness test”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 40, pp. 2347- 3277, 1997.
- [3] Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., “A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 24, pp. 337- 357, 1987.
- [4] Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., “Error estimates and adaptive refinement for plate bending problems”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 28, pp. 2839- 2853, 1989.
- [5] Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z. and Gong, N. G., “Effective and practical h-p version adaptive analysis procedures for the finite element method”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 28, pp. 879- 891, 1989.
- [6] Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., “Adaptive and mesh generation”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 32, pp. 783- 810, 1991.
- [7] Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., “The superconvergent patch recovery and A- posteriori error estimates, Part 1: the recovery techniqueInt”, *J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 33, pp. 1331- 1364, 1992.
- [8] Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., “The superconvergent patch recovery and A- posteriori error estimates, Part 2: error estimates and adaptivity”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 33, pp. 1365- 1382, 1992.
- [9] Zienkiewicz, O. C. and Huang, G. C., “A note on localization phenomena and adaptive finite element analysis in forming processes”, *Commun. Appl. Num. Meth.*, Vol. 6, pp. 71- 76, 1990.
- [10] Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., “The