



## برآورد اثر اندرکنش بین ترک های هیدرولیکی

علی عسگری<sup>۱\*</sup>، علی اکبر گلشنی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی و فناوری، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران  
<sup>۲</sup> گروه مکانیک خاک و پی، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۰۳/۲۹  
بازنگری: ۱۳۹۸/۰۵/۰۵  
پذیرش: ۱۳۹۸/۰۶/۰۲  
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۶/۰۱

### کلمات کلیدی:

شکست هیدرولیکی چندتایی  
اندرکنش ترک ها  
رشد هم زمان  
روش کشش کاذب  
روش تحلیلی

**خلاصه:** به منظور افزایش بهره‌وری استخراج هیدروکربن‌ها و گسترش ترک‌ها تا محل مخزن آن‌ها، ترک‌ها معمولا عمود بر تنش حداقل و به صورت دسته‌ای رشد داده می‌شوند. از دهه اخیر، هر ساله در قاره‌ی آمریکا بیش از ده هزار چاه افقی برای ایجاد و رشد ترک عمودی بر تنش کمینه در حال حفاری است و در هر چاه افقی بالغ بر صد ترک هیدرولیکی ایجاد می‌گردد. به منظور کاهش هزینه اجرایی، معمولا ۳-۸ ترک را به طور هم زمان در یک محدوده ۱۰-۳۰ متری ایجاد می‌کنند و آن‌ها را در مخزن گسترش می‌دهند. رشد هم زمان ترک‌ها با توجه به شکل، تعداد، موقعیت، فاصله و طول آن‌ها بر چگونگی رشد یکدیگر موثر است. به عبارت دیگر وقتی ترکی در سطوح خود تحت فشار ناشی از تزریق سیال قرار می‌گیرد، باعث رشد آن می‌شود اما ممکن است این فشار بر روی رشد ترک‌های مجاور اثر منفی داشته باشد، که به این اثر سایه یا اندرکنش گفته می‌شود. مسلما برآورد صحیح از اثر تنش سایه بین ترک‌ها منجر به طراحی بهینه تری می‌شود در این نوشتار به کمک روش کشش کاذب ارتقا یافته به بررسی اثر اندرکنش بین ترک‌های هیدرولیکی با توجه به فواصل ترک‌ها بر روی یکدیگر پرداخته می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که در ترک‌های میانی تحت تاثیر تنش سایه بیشتری نسبت به ترک‌های کناری قرار دارند و از طرفی افزایش فواصل بین ترک‌ها باعث کاهش اثر سایه می‌شود. نتایج این پژوهش در تعیین تعداد و فواصل ترک‌ها، در طراحی شکست هیدرولیکی بسیار کاربردی است.

### ۱- مقدمه و پیشینه پژوهش

ترک‌ها الگوسازی کنند. آن‌ها فرض کردند که ترک‌های هیدرولیکی به صورت عمود/عرضی بر جداره سیمانی چاه گسترش یابد و چاه به صورت افقی و درجهت تنش افقی کمینه حفر گردد. این حالت بهترین حالت حفر چاه در عمل است. همچنین ترک‌ها نسبت بهم موازی باقی بمانند و هیچگونه انحنای نسبت بهم نداشته باشند. آن‌ها در این تحقیق اثرات افت فشار در محل اتصال چاه با ترک و همچنین اثر اندرکنش ترک‌ها و سیال را در نظر گرفتند.

پژوهش‌های گسترده‌ای بر روی گسترش ترک‌های هیدرولیکی منفرد، چه حل عددی و چه روش‌های تحلیلی انجام شده است اما اخیرا اکثر پژوهش‌ها بر روی رشد هم زمان ترک‌های هیدرولیکی متمرکز شده است [۱-۱۳] که برخی از این پژوهش‌ها در زیر اشاره شده است.

بونگر [۱] با استفاده از ساده‌سازی و مقیاس کردن، میزان توان ورودی مورد نیاز پمپ جهت تزریق سیال و ایجاد شکست هیدرولیکی و رشد آن را از روش انرژی برای یک دسته از ترک‌های هیدرولیکی موازی در رژیم‌های سختی و گرانروی تعیین کرد. ایشان اثرات اندرکنش بین

لکامپوین و همکارانش [۵] با استفاده از ترکیب روش‌های حجم محدود و جابه‌جایی گسسته به ترتیب برای مجراسازی معادله‌ی جریان و کشسانی به طور موفقیت‌آمیزی توانستند رشد دسته ترک‌های موازی سکه‌ای شکل را با در نظرگیری اثر اندرکنش این

\* نویسنده‌دار مکاتبات: a.asgari@umz.ac.ir



در گذشته، برای در نظر گرفتن اثرات اندرکنش بین ترک ها بدون حضور سیال، نعمت ناصر و هوری [۱۹، ۲۰] روش کشش کاذب<sup>۹</sup> را معرفی کردند و در سال ۱۹۸۷ [۲۱] آنرا گسترش دادند. این روش بر مبنای توابع پتانسیل مختلط موسخلیشویلی [۲۲] می باشد. در این پژوهش، با استفاده از همین روش به بررسی اثرات اندرکنش بین ترک های هیدرولیکی پرداخته می شود. نوآوری در این پژوهش مربوط به به کارگیری روش کشش کاذب با حضور سیال است که در برآورد تنش اندرکنش بین ترک ها بسیار کاربردی است. همچنین اثر اندرکنش در ترک های هیدرولیکی چندتایی با توجه به موقعیت مکانی و تعداد آن ها به صورت تحلیلی بررسی نشده است که در این پژوهش به آن نیز پرداخته شده است.

برای برآورد تحلیلی از تنش های اندرکنشی ترک های هیدرولیکی مجاور نسبت به هم، ساختار این نوشتار بدین صورت دسته بندی شده است: در ابتدا مختصری در مورد معادله ی حاکم، بای-هارمونیک<sup>۱۰</sup>، بر پایه تئوری الاستیسیته ی اشاره می شود. حل این معادله منجر به تعیین تنش ها و جابجایی ها در یک محیط الاستیک می شود. تحلیل معادله ی بای-هارمونیک در حالت کلی یعنی بدون در نظر گرفتن شرایط مرزی و نوع بارگذاری توسط موسخلیشویلی [۲۲] بر مبنای توابع پتانسیل مختلط ارائه شد. این توابع پتانسیل باید طوری تعیین شوند که شرایط مرزی را ارضا کنند. در ادامه ی همین بخش، تنش های ایجاد شده در یک محیط دوبعدی حاوی یک ترک ناشی از تنش کششی به کمک روابط موسخلیشویلی تعیین می شوند. در بخش سوم، اثر اندرکنش بین دو ترک هیدرولیکی مورب به روش تنش کششی کاذب مورد بررسی قرار می گیرد. روش تنش کششی کاذب بر پایه روابط موسخلیشویلی (بخش دوم) است. سپس با کمک همین روش، میزان اندرکنش برای دسته ترک های موازی هیدرولیکی محاسبه می گردد و در پایان نتیجه های محقق شده از این نوشتار مورد بررسی قرار می گیرد.

## ۲- رابطه تنش و جابه جایی با توابع مختلط پتانسیل در یک

### سیستم شامل ناپوستگی

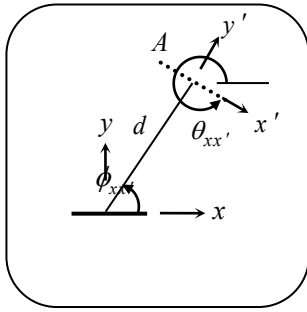
مسئله رشد یک ترک بر روی رشد ترک های دیگر در یک محیط تاثیر دارد. برای برآورد این اثرات نیاز است ابتدا اطلاعاتی

دو ترک موازی و مجاور هم را با استفاده از رابطه وسترگارد<sup>۱</sup> بررسی کرد [۱۴]. همچنین در بررسی انجام شده اثرات شکل ترک را در نظر گرفت و توان ورودی مورد نیاز برای شکست را برای ترک های دوبعدی<sup>۲</sup> KGD، شعاعی<sup>۳</sup> و PKN<sup>۴</sup> برآورد کرد. در ادامه این کار، بونگر و همکارانش [۲] با در نظرگیری اثر افت فشار ناشی از جریان سیال در محل اتصال چاه و ترک ها، مسئله مشابهی را بررسی کردند. آن ها همچنین سه نوع از ترک PKN را با توجه به نسبت ارتفاع، فاصله و طول ترک ها نسبت بهم در رژیم گرانروی مورد بررسی قرار دادند. همچنین، بونگر و همکارانش در سال ۲۰۱۳ [۱۵] گسترش دایک ها را مورد توجه قرار دادند. آن ها دایک ها را به صورت یک ترک PKN تیغه ای شکل در دو حالت (۱- وقتی ارتفاع ترک بزرگتر از فاصله بین دو دایک مجاور باشد و ۲- وقتی ارتفاع ترک کوچکتر از فاصله بین دو دایک مجاور باشد) بررسی کردند. آن ها نشان دادند که بهینه ترین حالت بر مبنای توان ورودی مورد نیاز پمپ برای رشد هم زمان ترک ها، موقعی است که فاصله دایک ها با ارتفاع آن ها برابر باشند. در پژوهش های اخیر بونگر و همکارانش، تنش های اندرکنش ترک های موازی به درستی مدل نشده اند.

پیرس و بونگر [۷] با پیشنهاد یک الگوی سه بعدی<sup>۵</sup>، اثرات تنش های اندرکنشی ترک های هیدرولیکی موازی را نسبت به هم بررسی کردند. این الگو قادر است اثرات تنش لایه های محدوده کننده اطراف مخزن را در نظر گیرد. توضیح اینکه ترک تیغه ای شکل<sup>۶</sup> سه بعدی در ابتدا به صورت شعاعی رشد می کنند و وقتی به موانع<sup>۷</sup> برخورد کردند با ارتفاع ثابت و به شکل ترک PKN رشد خواهند کرد. همچنین آن ها دریافتند که ترک های میانی تحت اثرات بیشتری از تنش های اندرکنش<sup>۸</sup> (از نوع تنش فشاری) قرار می گیرد که منجر به رشد کمتر آن ها خواهد شد. این پدیده توسط پژوهشگران دیگر نیز توصیف شده است [۴، ۱۶-۱۸]. از طرفی ترک های کناری رشد بیشتری خواهند داشت. اگر فواصل ترک میانی نسبت به هم زیادتر و ترک های کناری نسبت به هم کمتر شود آنگاه ممکن است منجر به رشد هم زمان ترک های میانی و کناری شود.

- 1 Westergard
- 2 Christianovic and Zheltov; Geertsma and de Klerk (KGD or KZGD)
- 3 penny shape or radial
- 4 Perkins and Kern; Nordgern (PKN)
- 5 novel parallel-planar 3D model
- 6 blade-like geometry
- 7 barriers
- 8 stress shadowing

9 pseudo-traction method  
10 Biharmonic



شکل ۱. ترک با طول  $2l$  در یک محیط همسان و کشسان

Fig. 1. A crack with  $2l$  length in the isotropic linear elastic solid

$u_x^A$  و  $u_y^A$ : جابجایی های نقطه ی  $A$  در جهت  $x$  و  $y$

$\nu$ : ضریب پواسون محیط

$G$ : مدول برشی محیط

رابطه ی ۱ از معادلات تعادل و سازگاری تنش و جابه جایی قابل اثبات است. برای اطلاع از چگونگی اثبات آن می توانید به مرجع [۲۴] رجوع کنید.

تابع پتانسیل مختلط  $\Phi(z)$  به حالت های بارگذاری و شرایط مرزی و نوع ناپیوستگی (مثل ترک، حفره) بستگی دارد. برای اطلاعات بیشتر از چگونگی تعیین توابع پتانسیل به کمک شرایط مرزی و نوع بارگذاری می توانید به مرجع [۲۲] رجوع کنید.

برای حالت خاصی، اگر تنش کششی محیطی  $\sigma_\infty$  به طور عمود بر امتداد ترک به طول  $2l$  وارد شود آن گاه داریم [۲۵]:

$$\Phi'(z) = \frac{\sigma_\infty}{2} \left( \frac{z}{\sqrt{z^2 - l^2}} - 1 \right) = \frac{\sigma_\infty}{2} \left( \frac{\Im}{\sqrt{\Im^2 - 1}} - 1 \right), \quad (2)$$

$$z = x + iy, \quad \Im = \rho + I\xi, \quad \rho = \frac{x}{l}, \quad \xi = \frac{y}{l}$$

که در آن  $\rho$  و  $\xi$  به ترتیب مختصات بی بعد شده در جهت  $x$  و  $y$  هستند.

برای تعیین تنش ها در مختصات محلی  $x'y'$  تحت زاویه  $\theta_{xx'}$  در جهت پادساعتگرد از محور  $x$  و به فاصله  $z$  از مرکز ترک، روابط (۱) به صورت زیر تغییر می کنند:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'x'}^A + \sigma_{y'y'}^A &= 2[\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)}] = 4 \operatorname{Re}[\Phi'(z)] \\ \sigma_{x'x'}^A + I\tau_{x'y'}^A &= \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} - e^{-2i\theta_{xx'}} (z\overline{\Phi''(z)} + \overline{\Psi'(z)}) \\ \sigma_{y'y'}^A - I\tau_{x'y'}^A &= \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} + e^{-2i\theta_{xx'}} (z\overline{\Phi''(z)} + \overline{\Psi'(z)}) \end{aligned} \quad (3)$$

$$z = x + iy = de^{i\theta_{xx'}} + x'e^{i\theta_{xx'}}, \quad I = \sqrt{-1}$$

در مورد توزیع یا پخش تنش در یک محیط دو بعدی با وجود یک ترک، داشته باشیم. برای تعیین توزیع تنش نیاز است معادله بای-هارمونیک،  $\nabla^4 U = 0$  (به طور مثال آمده در مرجع [۲۳]) تحلیل شود.  $U$  تابع تنش ایری<sup>۱</sup> است که با تعیین آن می توان تنش ها، کرنش ها و جابه جایی ها را در یک نقطه دلخواه در محیط شامل به دست آورد. لازم به ذکر است که این معادله برپایه ی فرضیات تئوری الاستیسیته ی خطی به دست می آید. برای تحلیل و تعیین تابع تنش ایری به صورت حقیقی برای یک محیط دو بعدی با شرایط مرزی دلخواه کاری نسبتاً دشوار است ولی با استفاده از توابع مختلط می توان جواب عمومی معادله بای-هارمونیک را بر حسب توابع پتانسیل مختلط  $\Phi(z)$  و  $\Psi(z)$  محاسبه کرد. موسخلشویلی [۲۲] یک راه حل تحلیلی با استفاده از توابع پتانسیل مختلط برای معادله بای-هارمونیک برای یک ترک در محیط کشسان ارائه کرد. مطابق تئوری موسخلشویلی، اگر در یک سیستمی ترکی از قبل موجود باشد (رجوع به شکل (۱))، آنگاه مولفه های تنش و جابه جایی در نقطه  $z = (x, y)$  از مرکز مختصات آن ترک از روابط زیر به دست می آید [۲۲]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^A + \sigma_{yy}^A &= 2[\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)}] = 4 \operatorname{Re}[\Phi'(z)] \\ \sigma_{yy}^A - \sigma_{xx}^A + 2I\tau_{xy}^A &= 2[\overline{z\Phi''(z)} + \Psi'(z)] \\ 2G(u_x^A + Iu_y^A) &= \kappa\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Psi'(z) = \overline{\Phi'(\bar{z})} - \Phi'(z) - z\Phi''(z)$$

$$z = x + iy, \quad I = \sqrt{-1}, \quad \begin{cases} \kappa = 3 - 4\nu, & \text{Plane strain} \\ \kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu), & \text{Plane Stress} \end{cases}$$

علامت بار و پریم به ترتیب نشانه مزدوج تابع مختلط و مشتق نسبت به متغیر است. همچنین پارامترهای به کار رفته در رابطه ی ۱ به صورت زیر تعریف شده اند:

$x$  و  $y$ : مختصات مکانی

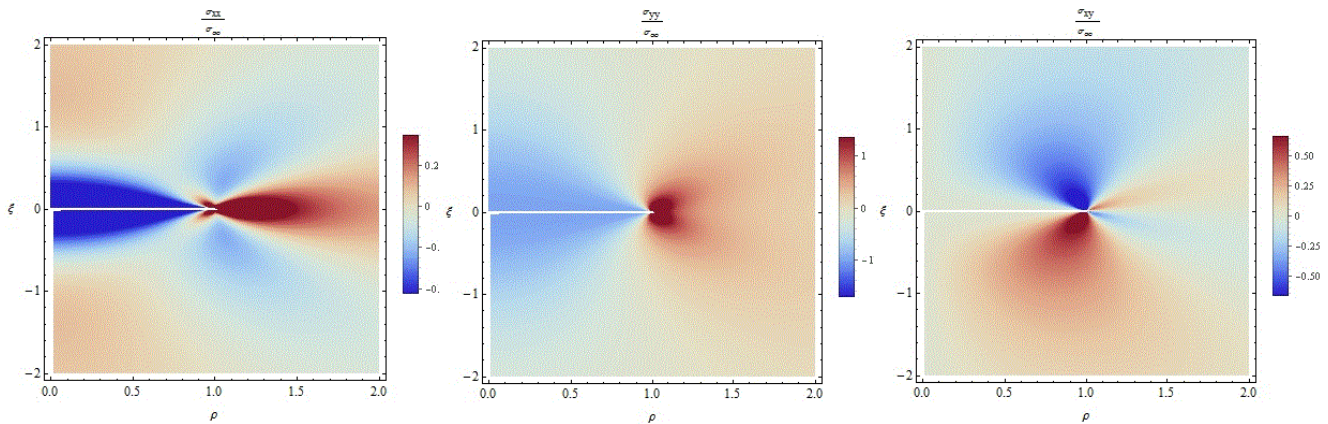
$z$ : متغیر توابع مختلط که برابر است با:  $z = x + iy$

$\Phi(z)$  و  $\Psi(z)$ : توابع پتانسیل مختلط هستند که به ابعاد

هندسی ترک، بارگذاری خارجی و مکان وابسته است.

$\sigma_{yy}^A$  و  $\sigma_{xx}^A$ : تنش های نرمال در جهت  $x$  و  $y$  برای نقطه ی  $A$

$\tau_{xy}^A$ : تنش برشی در نقطه ی  $A$



شکل ۲. توزیع تنشهای قائم، افقی و برشی نرمال شده حول یک ترک با استفاده از توابع پتانسیل مختلط ترسیم شده با استفاده از نرمافزار Mathematica version ۹.۰.۰

Fig. 2. Distribution of normalized stresses vicinity of half-length crack in  $x$  and  $y$  direction using of complex potentials (drawn using Mathematica version 9.0.0)

الگو سازی اثر اندرکنش از این روش استفاده کردند [۲۹، ۳۰]. لازم به ذکر است که روش کشش کاذب بر مبنای توابع پتانسیل مختلط موسخلیشویلی [۲۲] می باشد.

### ۳-۱- رابطه‌ی سازگاری و اندرکنش بین دو ترک هیدرولیکی

در این جا برای ارزیابی اندرکنش بین دو ترک هیدرولیکی از روش تنش کاذب استفاده شده است. این روش توسط هاری و نعمت ناصر [۱۹، ۲۰] در سال ۱۹۸۵ برای تحلیل تنش محیط ناهمسانگرد شامل ترک های ریز در محیط کشسانی پیشنهاد شده است.

برای سادگی ما در ابتدا یک محیط صفحه ای با دو ترک  $i$  و  $j$  به ترتیب به طول های  $l_i$  و  $l_j$  در یک سیستم تحت تنش های محیطی نرمال  $\sigma_{11}^{\infty}$  و  $\sigma_{22}^{\infty}$  و برشی  $\sigma_{12}^{\infty}$  و فشار سیال  $p_{fi}$  و  $p_{fj}$  مطابق شکل ۳ در نظر می گیریم. در اینجا فرض می شود که ترک ها همواره باز است و سطوح آن ها هیچ تماسی با یکدیگر ندارند. هر یک از ترک های  $i$  و  $j$  در مرکز خود دارای محورهای مختصات  $x_i, y_i$  و  $x_j, y_j$  هستند. زاویه از محور  $x_i$  تا  $x_j$  با  $\theta_{ji}$  و زاویه بین محور  $x_i$  و خط مرکز تا مرکز ترک ها با  $\phi_{ji}$  نشان داده شد. همچنین فاصله مرکز تا مرکز ترک ها برابر با  $d_{ij}$  است.

این مسئله مطابق شکل ۴ به سه جزء همگن،  $i$  و  $j$  تقسیم می شود. جزء همگن شامل یک محیط بدون هیچ ترک و محصور شده توسط تنش محیطی می باشد و تنش ها در محل فرضی ترک ها تعیین می شود. این تنش ها با استفاده از روابط دایره مور نیز قابل

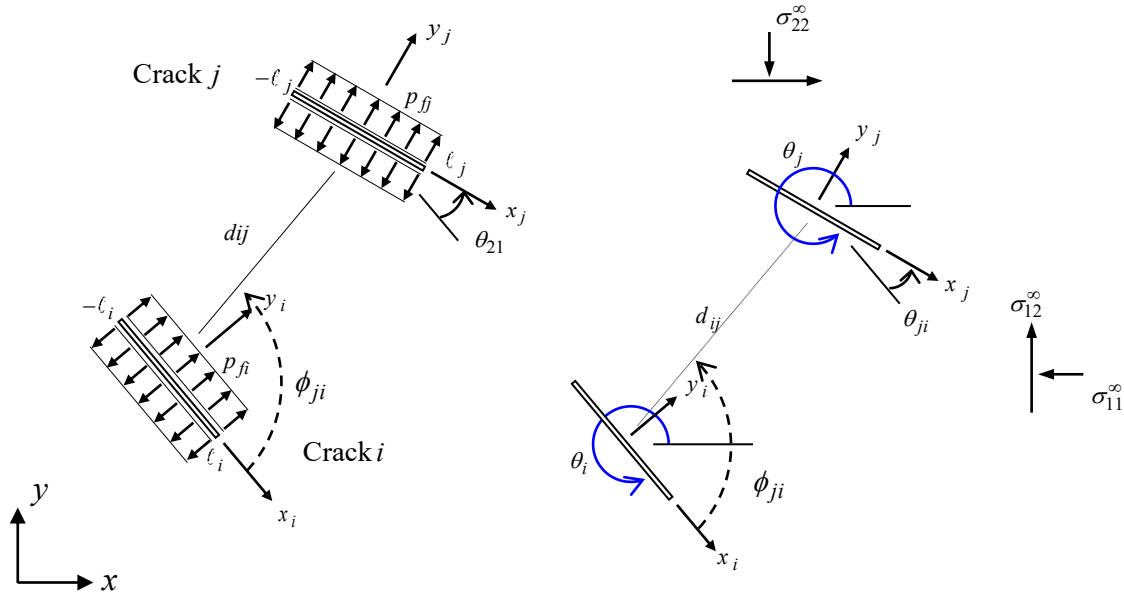
که در آن  $d$  فاصله مرکز ترک (مرکز مختصات  $x'y$ ) تا مرکز مختصات محلی  $x'y'$ ،  $\phi_{xx'}$  زاویه ی بین راستای  $d$  با محور  $x$  و  $\sigma_{x'y'}^A, \tau_{x'y'}^A$  و  $\sigma_{x'x'}^A$  به ترتیب تنش های نرمال و تنش برشی در مختصات محور محلی  $x'y'$  هستند.

شکل ۲، توزیع تنش در جهات افقی و عمودی در حول یک ترک تحت تنش کششی در جهت عمود بر ترک را نشان می دهد. این شکل با جایگذاری رابطه ی ۲ در رابطه ی ۳ و در شرایط  $\theta_{xx} = 0$ ، ترسیم شده اند. همان طور که در شکل مشاهده می شود در نوک ترک به دلیل وجود نقطه تکیه تمركز تنش وجود دارد. هر چقدر از نوک ترک دورتر شویم اثر تنش کم رنگ تر خواهد شد. رنگ آبی و قرمز به ترتیب نشانه ی ایجاد تنش کششی و فشاری در آن نقطه است.

### ۳- اندرکنش متقابل ترک ها

پژوهشگران زیادی با در نظر گرفتن فرض های بسیار ساده کننده اثر اندرکنش بین ترک ها را مطالعه کردند [۲۶-۲۸]. نعمت ناصر و هاری [۱۹، ۲۰] روش کشش کاذب<sup>۱</sup> را معرفی کردند و در سال ۱۹۸۷ [۲۱] آن را گسترش دادند. آن ها فرض کردند که ترک به صورت KGD هستند. همچنین با استفاده از تجزیه محیط به چند محیط که در قسمت بعد بدان اشاره می شود، اثر تنش اندرکنش را با استفاده از اصل جمع آثار قوا تعیین کردند. برخی از پژوهشگران برای

1 Pseudo-traction method (PTM)



شکل ۳. شماتیک دو ترک هیدرولیکی زاویه دار در یک صفحه

Fig. 3. Schematic of two inclined hydraulic fractures under compression far-field stresses

که در آن در  $\sigma_{22}^{\infty j}$  و  $\sigma_{12}^{\infty j}$ ، تنش موضعی ناشی از تنش های محیطی در ناحیه  $j$  است و مقادیر  $\sigma_{22}^{pj}$ ، و  $\sigma_{21}^{pj}$  تنش های کششی کاذب<sup>۱</sup> هستند که در قسمت های بعدی تعیین می شوند. با فرض باز بودن ترک های  $i$  و  $j$ ، تنش کل بر روی سطوح آزاد هر یک از ترک ها هیدرولیکی برابر با فشار سیال وارد بر آن است؛ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \sigma_{22}^i + \sigma_{22}^{\infty i} + \sigma_{22}^{pi} = p_{fi} \\ \sigma_{12}^i + \sigma_{12}^{\infty i} + \sigma_{12}^{pi} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \sigma_{22}^j + \sigma_{22}^{\infty j} + \sigma_{22}^{pj} = p_{fj} \\ \sigma_{12}^j + \sigma_{12}^{\infty j} + \sigma_{12}^{pj} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

روابط فوق همان شرایط مرزی مسئله هستند که از اثر اصطکاک برشی ناشی از حرکت سیال در ترک صرف نظر شده است و سطح ترک صیقلی فرض شده است. با توجه به این شرایط مرزی و رابطه ی ۳، روابط سازگاری برای جزء اصلی مسئله به صورت زیر تعیین می شوند:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{pj} + i\sigma_{12}^{pj} &= \Phi_j'(z_j) + \overline{\Phi_j'(z_j)} - \\ &e^{-i2\theta_j} \left( z_j \overline{\Phi_j''(z_j)} + \overline{\Psi_j'(z_j)} \right), \\ \sigma_{22}^{pi} - i\sigma_{12}^{pi} &= \Phi_j'(z_j) + \overline{\Phi_j'(z_j)} + \\ &e^{-i2\theta_j} \left( z_j \overline{\Phi_j''(z_j)} + \overline{\Psi_j'(z_j)} \right), I = \sqrt{-1} \end{aligned} \quad (6-f)$$

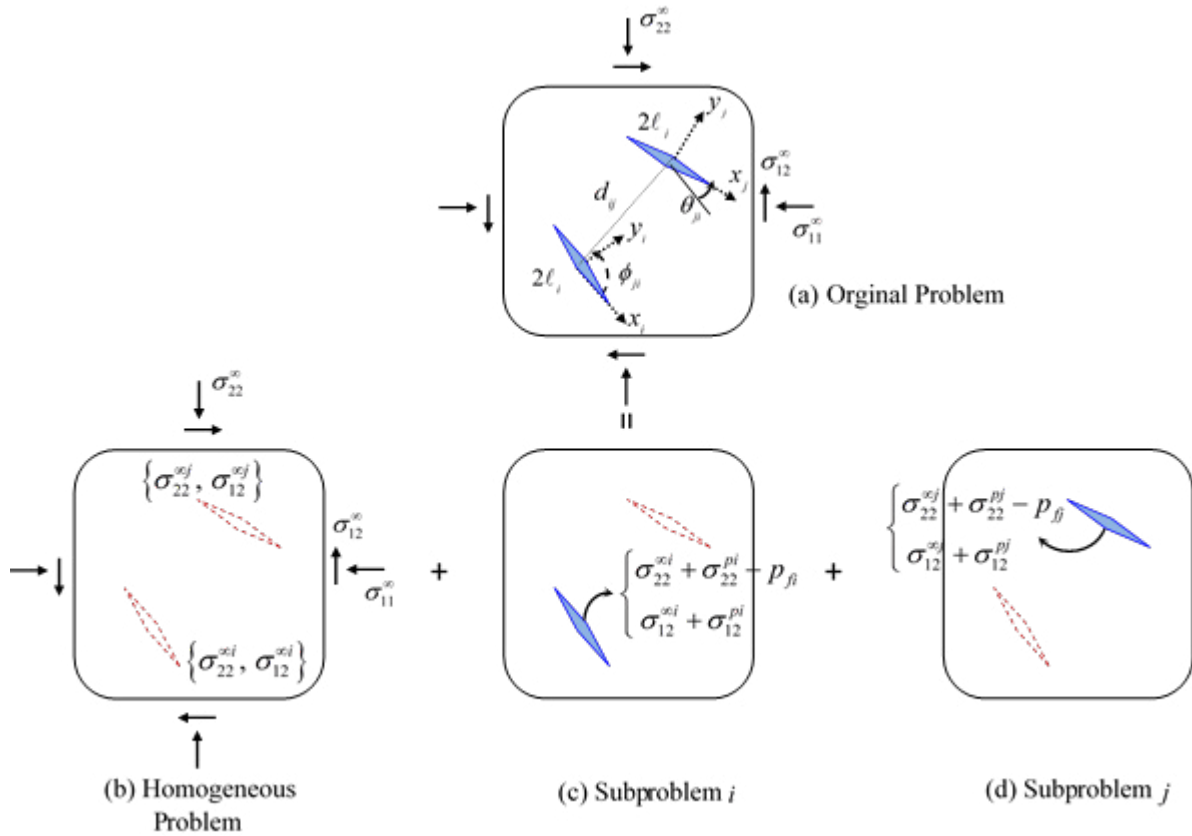
تعیین می باشند. جزء  $i$ ام، محیط فقط شامل یک ترک هیدرولیکی  $i$  تحت فشار سیال و بدون هیچ تنش محیطی است. تنش ناشی از این ترک هیدرولیکی در محل ترک  $j$  با استفاده از توابع پتانسیل موسخیلیشویلی تعیین می گردد.

به طور مشابه، جزء  $j$ ام نیز فقط شامل یک ترک هیدرولیکی  $j$  تحت فشار سیال و بدون هیچ تنش محیطی است. تنش ناشی از این ترک هیدرولیکی در محل ترک  $i$  نیز با استفاده از توابع پتانسیل موسخیلیشویلی تعیین می گردد. با در نظر گرفتن شرایط مرزی در سطوح ترک ها و اصل جمع آثار قوا می توان تنش اندرکنشی را تعیین کرد. البته نکته مهمی که در اینجا قابل ذکر است می توان جابه جایی ناشی از اندرکنش بین ترک ها را نیز از روابط موسخیلیشویلی تعیین کرد.

مطابق با رابطه موسخلشویلی، در جزء  $j$  تابع پتانسیل به صورت زیر تعیین می شود:

$$\begin{aligned} \Phi_j'(z_j) &= -\frac{1}{2\pi I \sqrt{z_j^2 - \ell_j^2}} \int_{-\ell_j}^{\ell_j} \frac{T \sqrt{s^2 - \ell_j^2}}{s - z_j} ds, \\ \Psi_j'(z_j) &= \overline{\Phi_j'(z_j)} - \Phi_j'(z_j) - z_j \Phi_j''(z_j), \quad z_j = x_j + iy_j \quad j=1,2 \\ z_j &= d_{ij} e^{i\theta_j} + x_i e^{i\theta_i}, \quad |x_i| \leq \ell_j \\ T &= \left\{ (\sigma_{22}^{\infty j} + \sigma_{22}^{pj}) - I(\sigma_{12}^{\infty j} + \sigma_{12}^{pj}) - p_{fj} \right\} \\ T &= T_R + iT_I, \quad T_R = \text{Re}\{T\}, \quad T_I = \text{Im}\{T\} \end{aligned} \quad (4)$$

1 pseudo tractions



شکل ۴. روند تجزیه دو ترک تحت تنشهای فشاری به جزءهای کوچکتر برای درنظرگیری اندرکنش بین آنها

Fig. 4. Process of decomposition of (a) original evolution problem to (b) homogeneous problem and (c, d) sub-problems *i* and *j*

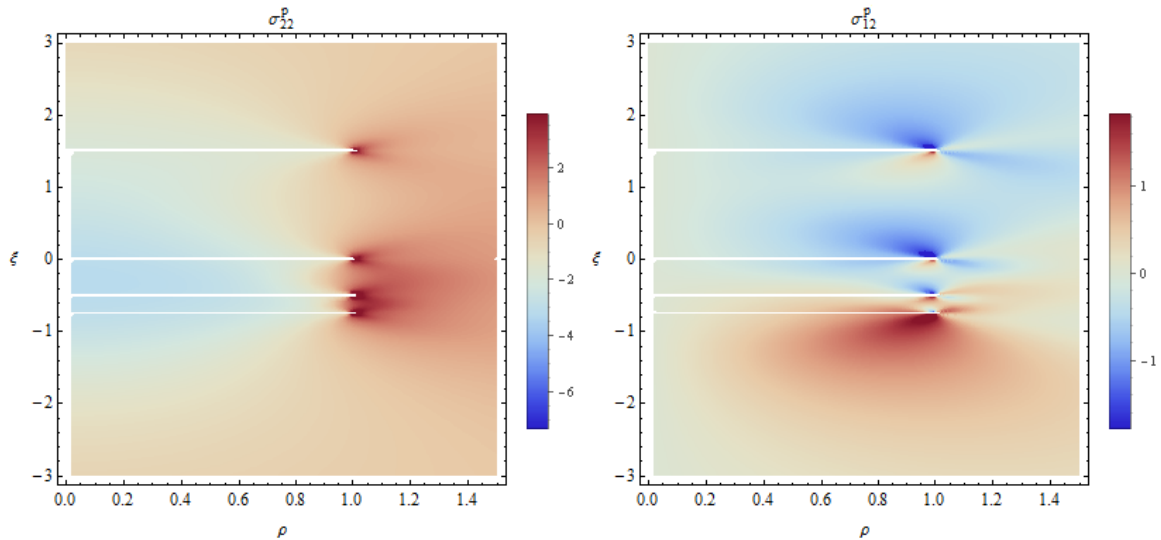
$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{pi} - I\sigma_{12}^{pi} = & \frac{(xT_l + yT_r) \sin\left(\frac{1}{2} \arg(-1 + (x + iy)^2)\right)}{\sqrt[4]{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2}} \\ & + \frac{(xT_l + 3y^2xT_l + yT_r - x^3T_l) \sin\left(\frac{3}{2} \arg(-1 + (x + iy)^2)\right)}{\left((x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2\right)^{3/4}} \quad \text{(ب-۶)} \\ & + \frac{(3x^2y - 2y - y^3)T_l \cos\left(\frac{3}{2} \arg(-1 + (x + iy)^2)\right)}{\left((x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2\right)^{3/4}} \\ & + \frac{(xT_r - yT_l) \cos\left(\frac{1}{2} \arg(-1 + (x + iy)^2)\right)}{\sqrt[4]{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2}} - T_r \end{aligned}$$

شکل ۵ توزیع دو بعدی تنش های قائم و افقی با در نظر گرفتن اثر اندرکنش ترک های هیدرولیکی موازی را از روش دقیق برگرفته از

$$\begin{aligned} z_i = d_{ji}e^{I\phi_{ji}} + x_j e^{I\theta_{ji}} \approx d_{ji}e^{I\phi_{ji}}, \quad z_j = \\ d_{ij}e^{I\phi_{ij}} + x_i e^{I\theta_{ij}} \approx d_{ij}e^{I\phi_{ij}}, \quad |x_j / l_j| \leq 1 \\ d_{ji} = d_{ij}, \quad \theta_{ij} = -\theta_{ji}, \quad \phi_{ij} = \phi_{ji} + \pi - \theta_{ji}. \end{aligned}$$

توجه شود که با ثابت فرض کردن فاصله مرکز تا مرکز ترک ها  $d_{ij}$  و زاویه بین آن ها  $\phi_{ij}$ ، تنش ها و توابع پتانسیل ناشی از ترک *j* در امتداد ترک *i* تابعی از  $x_i$  است که در اینجا این تغییرات نادیده در نظر گرفته می شود.

حل معادلات انتگرالی (۶-الف) در حالت دقیق و از راه صریح کار نسبتاً پیچیده است. در حالت خاص با فرض این که زاویه بین ترک ها  $\theta_{ij}$ ، برابر با صفر باشد، و مقدار  $T$  نسبت به متغیر انتگرال در رابطه (۴)، ثابت فرض شود و با جایگذاری رابطه ی ۴ در رابطه ی ۶-الف، حل دقیق آن به صورت رابطه ی ۶-ب در می آید:



شکل ۵. توزیع تنشهای قائم و افقی حول ترکهای موازی با اثر سایه با فرض  $\theta_{ij}=0$  و  $T=1$  ترسیم شده با استفاده از نرمافزار Mathematica version 9.0.0

Fig. 5. Distribution of vertical and horizontal stresses vicinity of half-length parallel cracks (drawn using Mathematica version 9.0.0)

سمت راست از روابط سازگاری ۶-الف داریم:

$$\begin{aligned} \Phi'_j(z_j) + \overline{\Phi'_j(z_j)} &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{\ell_j^2}{z_j^2} T + \frac{\ell_j^2}{\bar{z}_j^2} \bar{T} \right\} + \frac{3}{16} \left\{ \frac{\ell_j^4}{z_j^4} T + \frac{\ell_j^4}{\bar{z}_j^4} \bar{T} \right\} \\ &+ \left\{ \frac{1}{4} \frac{\ell_j^2}{d_{ij}^2} \right\} \left( e^{-12\phi_{ij}} \{T_R + IT_I\} + e^{12\phi_{ij}} \{T_R - IT_I\} \right) + \\ &+ \left\{ \frac{3}{16} \frac{\ell_j^4}{d_{ij}^4} \right\} \left( e^{-14\phi_{ij}} \{T_R + IT_I\} + e^{14\phi_{ij}} \{T_R - IT_I\} \right) = \\ &+ \left\{ \frac{1}{4} \frac{\ell_j^2}{d_{ij}^2} \right\} \left\{ 2 \cos 2\phi_{ij} T_R + 2 \sin 2\phi_{ij} T_I \right\} + \\ &+ \frac{3}{16} \frac{\ell_j^4}{d_{ij}^4} \left\{ 2 \cos 4\phi_{ij} T_R + 2 \sin 4\phi_{ij} T_I \right\}, \\ z_j \overline{\Phi''_j(z_j)} + \overline{\Psi'_j(z_j)} &= -\frac{z_j}{2} \left\{ \frac{\ell_j^2}{z_j^3} + \frac{3}{2} \frac{\ell_j^4}{z_j^5} \right\} \bar{T} + \\ &+ \left\{ \frac{1}{2} \frac{\ell_j^2}{z_j^2} + \frac{3}{8} \frac{\ell_j^4}{z_j^4} \right\} T_R + \frac{3}{8} \left\{ \frac{\ell_j^4}{z_j^4} \right\} \bar{T} = \\ &+ \left\{ \frac{1}{4} \frac{\ell_j^2}{d_{ij}^2} \right\} \left( -2e^{4i\phi_{ij}} \bar{T} + 2e^{2i\phi_{ij}} T_R \right) + \\ &+ \left\{ \frac{3}{16} \frac{\ell_j^4}{d_{ij}^4} \right\} \left( -4e^{6i\phi_{ij}} \bar{T} + 2e^{4i\phi_{ij}} T_R + 2e^{4i\phi_{ij}} \bar{T} \right) \end{aligned} \quad (A)$$

رابطه ی ۶-ب نشان می دهد. همان طور مشاهده می شود، اثر سایه با کم شدن فاصله ترک ها بیشتر می شود و این اثر با نزدیک شدن ترک ها بیشتر می شود.

برای حل پذیری معادلات انتگرالی ۶-الف، در حالت ترک های زاویه دار ( $\theta_{ij} \neq 0$ )، فرض می شود که تنش های کششی کاذب در سطوح ترک مقادیر ثابتی هستند و همچنین شرط  $|\ell_j/z_j| \ll 1$  برقرار است. با صرف نظر کردن از ترم های مرتبه بالاتری از  $O(\ell_j/z_j)^5$  و با استفاده از روابط ۴، توابع پتانسیل  $\Phi'_j(z_j)$  و  $\Psi'_j(z_j)$  برای جزء  $z$  بصورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \Phi'_j(z_j) &= \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{\ell_j}{z_j} \right)^2 + \frac{3}{16} \left( \frac{\ell_j}{z_j} \right)^4 \right\} T, \\ \Phi''_j(z_j) &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\ell_j^2}{z_j^3} + \frac{3}{2} \frac{\ell_j^4}{z_j^5} \right\} T, \\ \Psi'_j(z_j) &= \left\{ \frac{1}{2} \frac{\ell_j^2}{z_j^2} + \frac{3}{8} \frac{\ell_j^4}{z_j^4} \right\} T_R + \frac{3}{8} \left\{ \frac{\ell_j^4}{z_j^4} \right\} \bar{T} \end{aligned} \quad (V)$$

لازم به ذکر است که  $\Phi'_j(z_j)$  در رابطه ی ۷ به کمک بسط تیلور از رابطه ی ۴ تعیین می شود و  $\Phi''_j(z_j)$  همان مشتق تابع  $\Phi'_j(z_j)$  نسبت به  $z_j$  است. با جایگذاری روابط ۷ در ترم های

با قراردادن روابط ۸ در روابط سازگاری ۷ داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}^{pi} \\ \sigma_{22}^{pi} \\ \sigma_{12}^{pi} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left( \frac{\ell_j}{d_{ij}} \right)^2 \left\{ \begin{array}{l} (\cos 2\phi_j + \cos 2(2\phi_j - \theta_j) - \cos 2(\phi_j - \theta_j)) T_R \\ + (\sin 2\phi_j + \sin 2(2\phi_j - \theta_j)) T_I \\ (\cos 2\phi_j - \cos 2(2\phi_j - \theta_j) + \cos 2(\phi_j - \theta_j)) T_R \\ + (\sin 2\phi_j - \sin 2(2\phi_j - \theta_j)) T_I \\ (\sin 2(2\phi_j - \theta_j) - \sin 2\phi_j) T_R - \cos 2(2\phi_j - \theta_j) T_I \\ \left[ \cos 4\phi_j + 2\cos 2(3\phi_j - \theta_j) - 2\cos 2(2\phi_j - \theta_j) \right] T_R \\ + \left[ \sin 4\phi_j + 2\sin 2(3\phi_j - \theta_j) - \sin 2(2\phi_j - \theta_j) \right] T_I \\ \left[ \cos 4\phi_j - 2\cos 2(3\phi_j - \theta_j) + 2\cos 2(2\phi_j - \theta_j) \right] T_R \\ + \left[ \sin 4\phi_j - 2\sin 2(3\phi_j - \theta_j) + \sin 2(2\phi_j - \theta_j) \right] T_I \\ \left[ 2\sin 2(3\phi_j - \theta_j) - 2\sin 2(2\phi_j - \theta_j) \right] T_R \\ + \left[ -2\cos 2(3\phi_j - \theta_j) + \cos 2(2\phi_j - \theta_j) \right] T_I \end{array} \right\} \quad (11)$$

با جای گذاری ترم های  $T_I$  و  $T_R$  در رابطه فوق داریم:

$$\left\{ \sigma^{pi} \right\} = \left\{ \left[ \gamma_{ij} \right] + \left[ \varpi_{ij} \right] \right\} \left( \left\{ \sigma^{\infty j} \right\} + \left\{ \sigma^{pj} \right\} - \left\{ p_{\beta j} \right\} \right) \quad (12)$$

که در آن  $\sigma^{pi} = \{\sigma_{11}^{pi}, \sigma_{22}^{pi}, \sigma_{12}^{pi}\}^T$ ،  $\sigma^{\infty j} = \{\sigma_{11}^{\infty j}, \sigma_{22}^{\infty j}, \sigma_{12}^{\infty j}\}^T$  و  $p_{\beta j} = \{0, p_{\beta j}, 0\}^T$  باشد و تانسورهای سازگاری تقریب از درجه اول و دوم از ماتریس زیر پیروی می کند:

$$\left[ \gamma_{ij} \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{\ell_j}{d_{ij}} \right)^2 \begin{Bmatrix} 0 & a_1 & a_4 \\ 0 & a_2 & a_5 \\ 0 & a_3 & a_6 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\left[ \varpi_{ij} \right] = \frac{3}{8} \left( \frac{\ell_j}{d_{ij}} \right)^4 \begin{Bmatrix} 0 & b_1 & b_4 \\ 0 & b_2 & b_5 \\ 0 & b_3 & b_6 \end{Bmatrix}$$

که در آن  $a_i$  و  $b_i$ ،  $\{i = 1, 2, \dots, 6\}$  از رابطه زیر تعیین می شوند:

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos 2\phi_j + \cos 2(2\phi_j - \theta_j) - \cos 2(\phi_j - \theta_j) \\ a_2 &= \cos 2\phi_j - \cos 2(2\phi_j - \theta_j) + \cos 2(\phi_j - \theta_j) \\ a_3 &= \sin 2(2\phi_j - \theta_j) - \sin 2\phi_j \\ a_4 &= \sin 2\phi_j + \sin 2(2\phi_j - \theta_j) \\ a_5 &= \sin 2\phi_j - \sin 2(2\phi_j - \theta_j) \\ a_6 &= -\cos 2(2\phi_j - \theta_j) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{pi} - I\sigma_{12}^{pi} &= \frac{1}{4} \frac{\ell_j^2}{d_{ij}^2} \left\{ \begin{array}{l} \left( e^{-i2\phi_j} (T_R + iT_I) + e^{i2\phi_j} (T_R - IT_I) \right) \\ + \left( -2e^{i2(2\phi_j - \theta_j)} (T_R - IT_I) + 2e^{2i(\phi_j - \theta_j)} T_R \right) \end{array} \right\} \\ &+ \frac{3}{16} \frac{\ell_j^4}{d_{ij}^4} \left\{ \begin{array}{l} \left( e^{-i4\phi_j} (T_R + IT_I) + e^{i4\phi_j} (T_R - IT_I) \right) \\ + \left( -4e^{i2(3\phi_j - \theta_j)} (T_R - IT_I) + 2e^{i2(2\phi_j - \theta_j)} T_R + 2e^{i2(2\phi_j - \theta_j)} (T_R - IT_I) \right) \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\ell_j^2}{d_{ij}^2} \left\{ \begin{array}{l} \left[ 2\cos 2\phi_j - 2\cos 2(2\phi_j - \theta_j) + 2\cos 2(\phi_j - \theta_j) \right] T_R \\ + \left[ 2\sin 2\phi_j - 2\sin 2(2\phi_j - \theta_j) \right] T_I \\ \left[ -2\sin 2(2\phi_j - \theta_j) + 2\sin 2(\phi_j - \theta_j) \right] IT_R + 2\cos 2(2\phi_j - \theta_j) IT_I \end{array} \right\} \\ &+ \frac{3}{16} \frac{\ell_j^4}{d_{ij}^4} \left\{ \begin{array}{l} \left[ 2\cos 4\phi_j - 4\cos 2(3\phi_j - \theta_j) + 4\cos 2(2\phi_j - \theta_j) \right] T_R \\ + \left[ 2\sin 4\phi_j - 4\sin 2(3\phi_j - \theta_j) + 2\sin 2(2\phi_j - \theta_j) \right] T_I \\ \left[ -4\sin 2(3\phi_j - \theta_j) + 4\sin 2(2\phi_j - \theta_j) \right] IT_R \\ + \left[ 4\cos 2(3\phi_j - \theta_j) - 2\cos 2(2\phi_j - \theta_j) \right] IT_I \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

تنش های کششی کاذب که همان تنش های اندرکنش بین دو

ترک هم محسوب می شوند، در طول ترک ثابت فرض شده است.

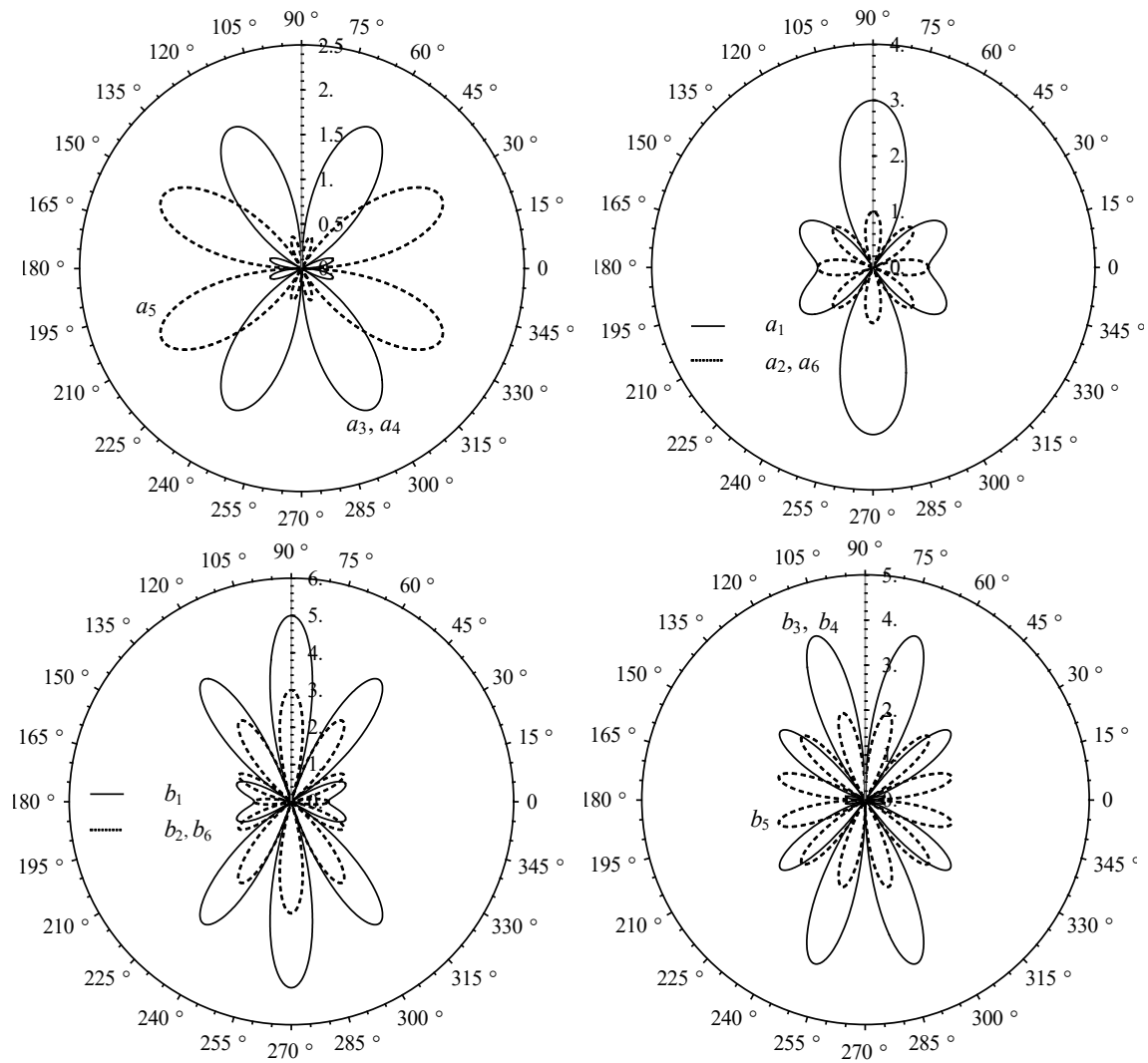
بنابراین روابط فوق به صورت زیر ساده می شوند:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{pi} &= \frac{1}{4} \frac{\ell_j^2}{d_{ij}^2} \left\{ \begin{array}{l} \left[ 2\cos 2\phi_j - 2\cos 2(2\phi_j - \theta_j) \right] + \left[ 2\cos 2(\phi_j - \theta_j) \right] T_R \\ + \left[ 2\sin 2\phi_j - 2\sin 2(2\phi_j - \theta_j) \right] T_I \end{array} \right\} \\ &+ \frac{3}{16} \frac{\ell_j^4}{d_{ij}^4} \left\{ \begin{array}{l} \left[ 2\cos 4\phi_j - 4\cos 2(3\phi_j - \theta_j) \right] + \left[ 4\cos 2(2\phi_j - \theta_j) \right] T_R \\ + \left[ 4\cos 2(2\phi_j - \theta_j) \right] T_I \\ \left[ 2\sin 4\phi_j - 4\sin 2(3\phi_j - \theta_j) \right] + \left[ 2\sin 2(2\phi_j - \theta_j) \right] T_I \end{array} \right\} \\ \sigma_{12}^{pi} &= \frac{1}{4} \frac{\ell_j^2}{d_{ij}^2} \left\{ \begin{array}{l} \left[ 2\sin 2(2\phi_j - \theta_j) - 2\sin 2(\phi_j - \theta_j) \right] T_R \\ - 2\cos 2(2\phi_j - \theta_j) T_I \end{array} \right\} \\ &+ \frac{3}{16} \frac{\ell_j^4}{d_{ij}^4} \left\{ \begin{array}{l} \left[ 4\sin 2(3\phi_j - \theta_j) - 4\sin 2(2\phi_j - \theta_j) \right] T_R \\ + \left[ -4\cos 2(3\phi_j - \theta_j) + 2\cos 2(2\phi_j - \theta_j) \right] T_I \end{array} \right\} \\ \sigma_{11}^{pi} &= \frac{1}{4} \frac{\ell_j^2}{d_{ij}^2} \left\{ \begin{array}{l} \left[ 2\cos 2\phi_j + 2\cos 2(2\phi_j - \theta_j) - 2\cos 2(\phi_j - \theta_j) \right] T_R \\ + \left[ 2\sin 2\phi_j + 2\sin 2(2\phi_j - \theta_j) \right] T_I \end{array} \right\} \\ &+ \frac{3}{16} \frac{\ell_j^4}{d_{ij}^4} \left\{ \begin{array}{l} \left[ 2\cos 4\phi_j + 4\cos 2(3\phi_j - \theta_j) - 4\cos 2(2\phi_j - \theta_j) \right] T_R \\ + \left[ 2\sin 4\phi_j + 4\sin 2(3\phi_j - \theta_j) - 2\sin 2(2\phi_j - \theta_j) \right] T_I \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

در نهایت رابطه فوق را می توان به صورت یک رابطه تانسوری

بیان کرد.





شکل ۶. نمودار ضرایب اندرکنش ترکها بر حسب زاویه نسبی بین آنها  $\phi_{ij}$  و با فرض  $\theta_{ij} = \pi/2$ .  
**Fig. 6. Dependence of interaction effects on relative angle  $\phi_{ij}$  assuming  $\theta_{ij} = \pi/2$ .**

۳-۲- رابطه اندرکنش بین دو ترک هیدرولیکی موازی

اگر دو ترک هیدرولیکی  $i$  و  $j$  در یک سیستم مطابق شکل ۴ بدون هیچ اختلاف زاویه ای و موازی از هم قرار گرفته باشند  $(\phi_{ij} = \pi/2, \theta_{ij} = 0, d_{ij} = h)$  آنگاه تانسورهای سازگاری از رابطه‌ی ۱۳ به صورت در می آید:

$$[\gamma_{ij}] = \frac{1}{2} \left( \frac{\ell}{h} \right)^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\sigma_{ij}] = \frac{3}{8} \left( \frac{\ell}{h} \right)^4 \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

که در آن  $h$  فاصله بین دو ترک هیدرولیکی است. اگر از اثرات تنش های فشاری  $\sigma_{11}^{\infty}$  و  $\sigma_{12}^{\infty}$  صرف نظر گردد، آنگاه تنش های

$$\begin{aligned} b_1 &= \cos 4\phi_{ij} + 2 \cos(2(3\phi_{ij} - \theta_{ij})) - 2 \cos(2(2\phi_{ij} - \theta_{ij})) \\ b_2 &= \cos 4\phi_{ij} - 2 \cos(2(3\phi_{ij} - \theta_{ij})) + 2 \cos(2(2\phi_{ij} - \theta_{ij})) \\ b_3 &= 2 \sin(2(3\phi_{ij} - \theta_{ij})) - 2 \sin(2(2\phi_{ij} - \theta_{ij})) \\ b_4 &= \sin 4\phi_{ij} + 2 \sin(2(3\phi_{ij} - \theta_{ij})) - \sin(2(2\phi_{ij} - \theta_{ij})) \\ b_5 &= \sin 4\phi_{ij} - 2 \sin(2(3\phi_{ij} - \theta_{ij})) + \sin(2(2\phi_{ij} - \theta_{ij})) \\ b_6 &= -2 \cos(2(3\phi_{ij} - \theta_{ij})) + \cos(2(2\phi_{ij} - \theta_{ij})) \end{aligned} \quad (15)$$

مقادیر ضرایب روابط ۱۴ و ۱۵ در مختصات قطبی برای مقادیر مشخصی از  $\theta_{ij}$  در شکل ۶ ترسیم شده است. این ضرایب، درایه های تانسور سازگاری هستند که میزان تاثیر تنش های محیطی و فشار هیدرولیکی را در برآورد تنش های کششی کاذب بیان می کند.

در حالت خاص اگر اثر ترم  $\sigma_I^{pj}$  ( $\gamma_{ij} + \varpi_{ij}$ ) (تنش کاهنده ناشی از تنش اندرکنش)، برای محاسبه ترم اندرکنشی،  $\sigma_I^{pi}$  در رابطه ی ۱۲ نادیده فرض شود، در این صورت رابطه ی ۲۰-الف به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\sigma_I^{pi}}{p_0} = \left\{ 1 - \frac{\xi^3}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} = \frac{3}{2\xi^2} - \frac{15}{8\xi^4} + \frac{35}{16\xi^6} - \frac{315}{128\xi^8} + O(\xi^{-10}), \quad \xi \gg 1 \quad (20-b)$$

رابطه ی ۲۰-ب با یافته های مراجع [۳۲، ۳۱] نیز مطابقت دارد. شکل (۷) مقایسه ای بین تنش اندرکنش با ترم تنش کاهنده ناشی از تنش اندرکنش (رابطه ی ۲۰-الف) و بدون آن (رابطه ی ۲۰-ب) را نشان می دهد. نتایجی که از این شکل برداشت می شود اینست که اولاً: با افزایش فاصله ترک ها از هم تنش اندرکنشی کاهش می یابد و اثر آن ناچیز است. ثانیاً: اختلاف بین تنش های اندرکنشی از دو رابطه ی ۲۰-الف و ب با افزایش فاصله کاهش می یابد و مسلماً برای فواصل کمتر این اثر قابل توجه است. لازم به ذکر است که رابطه ی ۲۰-ب تنش اندرکنش را دست بالاتر تعیین می کند.

۳-۲-۱- محاسبه تنش اندرکنش،  $\sigma_I$ ، ناشی از چندین ترک موازی هیدرولیکی در حالت ترک دو بعدی KGD:

با فراخوانی و کمک از رابطه ی ۳، توابع پتانسیل  $\Phi'(z)$  و  $\Psi'(z)$  برای ترک دو بعدی KGD از رابطه زیر به دست می آید:

$$\Phi'(z) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{z^2 - \ell^2}} \int_{-\ell}^{\ell} p_0 \frac{\sqrt{\ell^2 - s^2}}{s - z} ds \quad (21)$$

$$\Psi'(z) = \overline{\Phi'(\bar{z})} - \Phi'(z) - z\Phi''(z)$$

$$z = x + Iy, \quad I = \sqrt{-1}$$

که  $\ell$  طول نیم ترک است. اگر فشار  $p_0$  بر سطوح ترک نسبت به متغیر انتگرال ثابت فرض شود آنگاه رابطه ی ۲۱ به صورت زیر ساده می شود:

کششی کاذب به کمک رابطه ی ۱۱ به صورت زیر در می آید:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^{pi} \\ \sigma_{22}^{pi} \\ \sigma_{12}^{pi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{h}\right)^2 - \frac{9}{8}\left(\frac{\ell}{h}\right)^4 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}\left(\frac{\ell}{h}\right)^2 + \frac{15}{8}\left(\frac{\ell}{h}\right)^4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{h}\right)^2 + \frac{9}{8}\left(\frac{\ell}{h}\right)^4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^{sj} + \sigma_{11}^{pi} \\ \sigma_{22}^{sj} + \sigma_{22}^{pi} - p_{fj} \\ \sigma_{12}^{sj} + \sigma_{12}^{pi} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\sigma_{22}^{pi} = \left( -\frac{3}{2}\left(\frac{\ell}{h}\right)^2 + \frac{15}{8}\left(\frac{\ell}{h}\right)^4 \right) \{ \sigma_{22}^{sj} + \sigma_{22}^{pi} - p_{fj} \}$$

با فرض این که  $\sigma_{22}^{pi} = \sigma_I^{pi}$  و  $\sigma_{22}^{sj} = \sigma_I^{sj}$  باشد رابطه ی (۱۷) به صورت زیر ساده می شود:

$$\sigma_{22}^{pi} = \sigma_I^{pi} = \left( -\frac{3}{2\xi^2} + \frac{15}{8\xi^4} \right) (\sigma_0 - p_{fj} + \sigma_I^{sj}) \quad (18)$$

$$\sigma_{22}^{sj} = \sigma_0, \quad \sigma_I^{sj} = \sigma_{22}^{sj}, \quad \xi = \frac{h}{\ell}$$

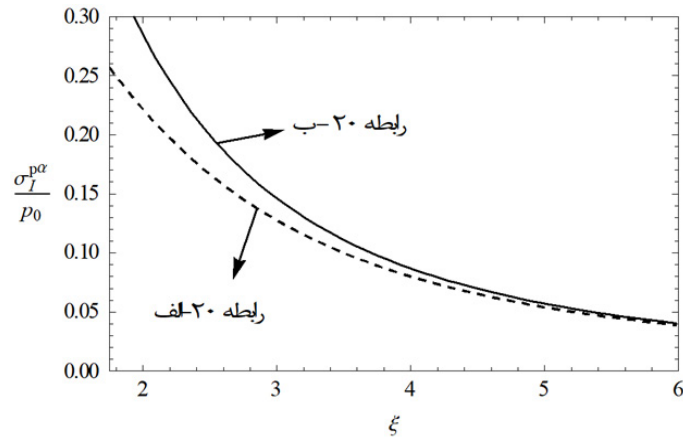
با توجه به این که طول نیم ترک ها و دیگر مشخصات آنها یکسان فرض شده است در نتیجه  $\sigma_I^{pi} = \sigma_I^{sj}$  است؛ یعنی این که اثری که ترک  $i$  بر روی ترک  $j$  می گذارد با اثر ترک  $j$  بر روی ترک  $i$  یکسان است. بنابراین رابطه ی ۱۸ به صورت زیر ساده می شود:

$$\sigma_I^{pi} = \frac{3p_0(4\xi^2 - 5)}{-15 + 12\xi^2 + 8\xi^4} + O(\xi^{-6}), \quad (19)$$

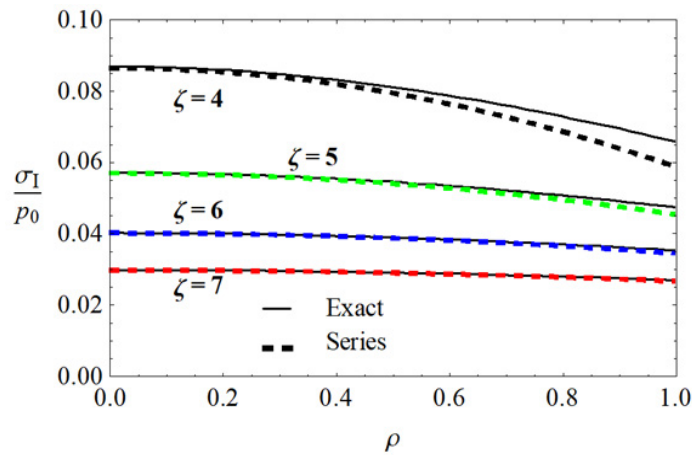
$$p_0 = p_{f\beta} - \sigma_0, \quad \xi = \frac{h}{\ell}$$

رابطه ی ۱۹ یک رابطه ی تقریبی برای تعیین اندرکنش با تقریب  $O(\xi^{-6})$  است که اثر ترم  $\sigma_I^{pj}$  ( $\gamma_{ij} + \varpi_{ij}$ ) (تنش کاهنده ناشی از تنش اندرکنش) نیز در نظر گرفته شد. برای تعیین رابطه دقیق اندرکنش با در نظر گرفتن اثر تنش کاهنده، کدی تحت نرم افزار 9.0.0 Mathematica version نوشته شده است. این رابطه به صورت زیر است:

$$\frac{\sigma_I^{pi}}{p_0} = \left\{ 1 - \frac{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}}{-\xi^3 + 2(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} = 1 - \frac{1}{2 - \frac{\xi^3}{(1+\xi^2)^{3/2}}} = \frac{3}{2\xi^2} - \frac{33}{8\xi^4} + \frac{179}{16\xi^6} - \frac{3873}{128\xi^8} + O(\xi^{-10}) \quad (20-f)$$



شکل ۷. مقایسه‌ی ترم اندرکنش با در نظرگیری ترم  $(\gamma_{ij} + \varpi_{ij})\sigma_I^{pj}$  و بدون آن  
 Figure 7. Comparison the interaction term considering  $(\gamma_{ij} + \varpi_{ij})\sigma_I^{pj}$  and without it.



شکل ۸. مقایسه‌ی بین مقادیر رابطه (۲۴) و مقادیر دقیق محاسبه شده از رابطه (۲۳)  
 Fig. 8. Comparison Between exact solution of (Eq. 23) and 3 term series approximation (Eq. 24) for  $\frac{\sigma_I}{p_0}$

با جایگذاری رابطه‌ی ۲۲ در رابطه‌ی ۲۳ و با کمک سری مجانب شونده<sup>۱</sup> به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{\sigma_I}{p_0} = \frac{3}{2\zeta^2} - \frac{15\left(\rho^2 + \frac{1}{4}\right)}{2\zeta^4} + \frac{35\left(\rho^4 + 3\rho^2 + \frac{1}{8}\right)}{2\zeta^6} + O(\zeta^{-8}) \quad (24)$$

رابطه‌ی ۲۴ برای مقادیر  $1 \gg \zeta$  دقت نسبتاً قابل قبولی دارد. گفتنی است که بسط مجانبی برای مقادیر نسبتاً بزرگتر از یک استفاده می‌گردد و برای مقادیر کوچکتر از یک از بسط تیلور استفاده می‌شود. مقایسه‌ی بین مقادیر رابطه‌ی ۲۴ و مقادیر دقیق آن (رابطه‌ی ۲۳) در شکل ۸ نشان داده شد. با توجه به ماهیت سری مجانب شونده هر چقدر  $\zeta$  بزرگتر باشد، میزان خطای تنش اندرکنش نسبت به حل دقیق کمتر است. لازم به ذکر است که رابطه‌ی ۲۴ بدون اثر تنش

$$\Phi'(z) = -\frac{p_0}{2} \left( \frac{z}{\sqrt{z^2 - \ell^2}} - 1 \right) = \quad (22)$$

$$-\frac{p_0}{2} \left( \frac{z/\ell}{\sqrt{(z/\ell)^2 - 1}} - 1 \right) = -\frac{p_0}{2} \left( \frac{\Im}{\sqrt{(\Im)^2 - 1}} - 1 \right)$$

$$\Im = \frac{z}{\ell} = \frac{x}{\ell} + I \frac{y}{\ell} = \rho + I\zeta, \quad I = \sqrt{-1}$$

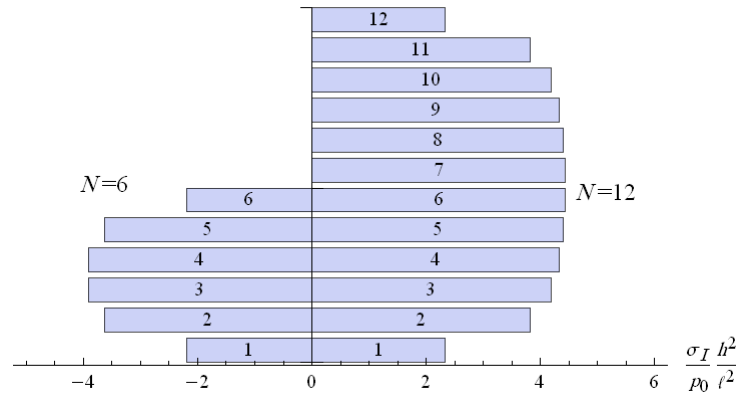
با فراخوانی رابطه‌ی ۳ و فرض موازی بودن ترک‌های هیدرولیکی و رشد هم‌زمان، تنش اندرکنش از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned} \sigma_{y'y'}^A &= \sigma_I = \text{Re} \left[ \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} + z\overline{\Phi''(z)} + \overline{\Psi'(z)} \right] \\ &= \text{Re} \left[ 2\Phi'(z) + \overline{z\Phi''(z)} + \Psi'(z) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

$$\Psi'(z) = \overline{\Phi'(\bar{z})} - \Phi'(z) - z\overline{\Phi''(z)},$$

$$z = x + Iy, \quad x = 0, \quad y = d, \quad I = \sqrt{-1},$$

1 asymptotic expansion



شکل ۹. میزان ضریب اندرکنش با توجه به موقعیت ترک ها برای دسته ترک های شش تایی و دوازده تایی  
 Fig. 9. The shadow stress ratio according to the location of the cracks for the six- and twelve-array cracks

، بر روی یک ترک جدای از موقعیت مکانی آن ترک را از رابطه‌ی زیر به دست آورد:

$$\frac{\bar{\sigma}_l}{p_0} \approx \frac{3}{2} \left( \frac{2}{N} \right) \frac{\ell^2}{h^2} \sum_{m=1}^{N-1} \mathbb{H}_m^2 - \frac{15}{8} \left( \frac{2}{N} \right) \frac{\ell^4}{h^4} \sum_{m=1}^{N-1} \mathbb{H}_m^4, \quad (26)$$

if  $N \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\bar{\sigma}_l}{p_0} \approx \frac{\pi^2 \ell^2}{2h^2} - \frac{\pi^4 \ell^4}{24 h^4}$

رابطه‌ی فوق با یافته‌ی بنسم و همکارانش [۳۳] در حالتی که تعداد ترک ها بی نهایت فرض شود، مطابقت دارد.

شکل ۹، برای درک بهتر میزان تاثیر اندرکنش با توجه به موقعیت و تعداد ترک های موازی، به کمک رابطه‌ی ۲۵ و با خطای  $O(\ell/h)^{-4}$ ، ترسیم شده است. مطابق با این شکل، ترک های میانی بیشتر از ترک های کناری تحت تاثیر اندرکنش قرار می گیرند. از طرفی با افزایش تعداد ترک ها، میزان اندرکنش برای ترک های میانی افزایش یافته است ولی این افزایش چندان چشمگیر نیست. با توجه به توضیحات فوق، مسلماً اگر به دسته ترک های موازی سیالی با دبی یکسان تزریق شود، ترک های میانی رشد کمتری به دلیل وجود تنش های فشاری ناشی از اندرکنش خواهند داشت. این رشد ناهمسان باعث تغییر مجدد در برآورد اثر اندرکنش خواهد گذاشت که به دلیل اختلاف در طول های دسته ترک، رابطه‌ی ۲۵ بلااستفاده است. البته برای این که ترک ها رشد یکسانی داشته باشند و یا به عبارت دیگر، تنش اندرکنش یکسانی داشته باشند می توان فواصل بین ترک های میانی را نسبت به فواصل ترک های کناری افزایش داد. این دستاورد

کاهنده ناشی از اندرکنش ترک مجاور، به دست آمده از رابطه (۱۹) است. در شرایطی که از ترم های  $O(\zeta^{-4})$  و بالاتر صرف نظر شود و  $\rho = 0$  باشد، روابط ۲۴ و ۱۹ یکسان می شوند.

آن چه مسلم است، مطابق با رابطه‌ی ۲۴، میزان تنش اندرکنش ترک های مجاور بر روی یکی از آن ها به موقعیت آن ترک و تعداد ترک های موازی وابسته است. بنابراین برای برآورد اثر اندرکنش  $N$  ترک هیدرولیکی بر روی یکی از ترک ها در موقعیت  $\hat{P}$  از ترک کناری، رابطه‌ی ۲۴ با تقریب درجه  $O(\zeta^{-6})$  به صورت زیر تغییر می کند:

$$\left( \frac{\sigma_l}{p_0} \right)_{\hat{P}} = \frac{3\ell^2}{2h^2} (\mathbb{H}_{\hat{P}}^2 + \mathbb{H}_{N-\hat{P}-1}^2) - \frac{15\ell^4}{8h^4} (\mathbb{H}_{\hat{P}}^4 + \mathbb{H}_{N-\hat{P}-1}^4) + O(\ell/h)^{-6}, \quad \hat{P} = 0 \dots N-1 \quad (25)$$

$$\mathbb{H}_r^{(k)} = \sum_{m=1}^{m=r} \frac{1}{m^k}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{H}_r^{(k)} = \mathbb{Z}(k),$$

$$\mathbb{H}_{\infty}^2 = \mathbb{Z}(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\mathbb{H}_0^{(k)} = 0, \quad \mathbb{H}_1^{(k)} = 1$$

که در آن  $\mathbb{H}_r^{(k)}$  عدد هارمونیک<sup>۱</sup> از درجه  $k$  و  $\mathbb{Z}$  تابع زتای ریمان است. تنش های اندرکنشی با استفاده از رابطه‌ی ۲۵ برای تمام ترک هایی که قرار است باهم و هم زمان رشد پیدا کنند، بسته به موقعیت مکانی ترک ها محاسبه می گردد.

با یک متوسط گیری ساده می توان تنش اندرکنش متوسط،  $\bar{\sigma}_l$

1 Harmonic Number

می تواند در انتخاب تعداد سوراخ اولیه<sup>۱</sup> و فواصل بین ترک ها در فرآیند شکست هیدرولیکی بسیار کمک کننده باشد. مطابق با رابطه ی سندون و تادا و همکارانش [۱۴، ۲۵]، فشار سیال بر روی سطوح ترک به راحتی از رابطه ی زیر قابل تعیین است:

$$p_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{E'Q_0t}{\ell^2} \quad (27)$$

با تعیین میزان اندرکنش بین دسته ترک ها با توجه به تعداد و موقعیت آن ها در محیط الاستیک، می توان نرخ کار انجام شده ناشی از اثر اندرکنش را برای ترک هیدرولیکی به دست آورد:

$$W'_I = -2 \int_0^\ell \sigma_I \frac{\partial w}{\partial t} dx, \quad (28)$$

کرد.

#### ۵- تقدیر و تشکر

نویسندگان از راهنمایی های ارزنده پروفیسور اندرو بونگر (Andrew Bungler) از دانشگاه Pittsburg آمریکا برای واضح تر شدن روند این پژوهش سپاسگزارند.

#### مراجع

- [1] A. Bungler, Analysis of the power input needed to propagate multiple hydraulic fractures, International Journal of Solids and Structures, 50(10) (2013) 1538-1549.
- [2] A. Bungler, R.G. Jeffrey, X. Zhang, Constraints on simultaneous growth of hydraulic fractures from multiple perforation clusters in horizontal wells, SPE Journal, 19(04) (2014, a) 608-620.
- [3] A.P. Bungler, A.P. Peirce, Numerical Simulation of Simultaneous Growth of Multiple Interacting Hydraulic Fractures from Horizontal Wells, in: Shale Energy Engineering -Technical Challenges, Environmental Issues, and Public Policy, ASCE, 2014, b, pp. 201-210.
- [4] L.N. Germanovich, L.M. Ring, D.K. Astakhov, J. Shlyapobersky, M.J. Mayerhofer, Hydraulic fracture with multiple segments II. Modeling, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 34(3) (1997) 98. e91-98. e15.

که در آن  $w$  بازشدگی ترک و  $\sigma_I$  و  $\bar{\sigma}_I$  به ترتیب تنش اندرکنش ناشی از ترک های هیدرولیکی مجاور و متوسط است که مطابق رابطه ی زیر تعیین می شود:

$$\sigma_I = \frac{3}{4\pi} \frac{E'Q_0t}{h^2} H_{N-1}^2 + O(\ell/h)^{-4}, \quad (29)$$

$$\bar{\sigma}_I \approx \frac{3}{2\pi} \frac{E'Q_0t}{Nh^2} \sum_{m=1}^{N-1} H_m^2,$$

با استفاده از رابطه ی نرخ انرژی می توان، توان مورد نیاز پمپ برای ایجاد شکست و رشد دادن ترک ها تخمین زد. هنگامی که ترک های هیدرولیکی بطور هم زمان رشد می کنند باعث افزایش در تنش فشاری ناشی از اندرکنش بین ترک های همسایه می شود؛ در نتیجه توان یا قدرت پمپ بالاتری جهت تامین فشار سیال ورودی و به تبع آن برای گسترش ترک نیاز است.

#### ۴- نتیجه گیری

در این پژوهش، روش کدب برای تعیین میزان اندرکنش بین ترک های هیدرولیکی مورب ارائه شد و برای دسته ترک ها با توجه به تعداد و موقعیت ترک ها در محیط الاستیک گسترش داده شد. پژوهش حاضر نشان می دهد که با افزایش تعداد ترک ها، میزان

- 260.
- [15] A.P. Bunger, T. Menand, A. Cruden, X. Zhang, H. Halls, Analytical predictions for a natural spacing within dyke swarms, *Earth and Planetary Science Letters*, 375 (2013) 270-279.
- [16] M. Fisher, J. Heinze, C. Harris, B. Davidson, C. Wright, K. Dunn, Optimizing horizontal completion techniques in the Barnett shale using microseismic fracture mapping, in: *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Society of Petroleum Engineers, 2004.
- [17] B.R. Meyer, L.W. Bazan, A discrete fracture network model for hydraulically induced fractures-theory, parametric and case studies, in: *SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference*, Society of Petroleum Engineers, 2011.
- [18] H.H. Abass, M.Y. Soliman, A.M. Al-Tahini, J.B. Surjaatmadja, D.L. Meadows, L. Sierra, Oriented fracturing: A new technique to hydraulically fracture an openhole horizontal well, in: *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Society of Petroleum Engineers, 2009.
- [19] H. Horii, S. Nemat-Nasser, Elastic fields of interacting inhomogeneities, *International journal of solids and structures*, 21(7) (1985) 731-745.
- [20] H. Horii, S. Nemat-Nasser, Compression-induced microcrack growth in brittle solids: axial splitting and shear failure, *Journal of Geophysical Research*, 90(B4) (1985) 3105-3125.
- [21] S. Nemat-Nasser, M. Hori, Toughening by partial or full bridging of cracks in ceramics and fiber reinforced composites, *Mechanics of materials*, 6(3) (1987) 245-269.
- [22] N.I. Muskhelishvili, J. Radok, Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Cambridge Univ Press, 1953.
- [23] A.T. Zehnder, *Fracture Mechanics, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, Springer Netherlands: 62, Pages XIV, 226, 2012.
- [24] A. Asgari, *Hydraulic Fracture Propagation in Brittle Rock: Based on Hydro-Mechanical Model*, Tarbait Modares University, Tehran, 2016.
- [25] H. Tada, P. Paris, G. Irwin, *The analysis of cracks*
- [5] B. Lecampion, J. Desroches, Simultaneous initiation and growth of multiple radial hydraulic fractures from a horizontal wellbore, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, (2015).
- [6] V.M. Narendran, Analysis of growth and interaction of multiple hydraulic fractures, in: *SPE Reservoir Simulation Symposium*, Society of Petroleum Engineers, 1983.
- [7] A. Peirce, A. Bunger, Interference Fracturing: Nonuniform Distributions of Perforation Clusters That Promote Simultaneous Growth of Multiple Hydraulic Fractures, *SPE Journal*, 20(02) (2015) 384-395.
- [8] K. Yamamoto, T. Shimamoto, S. Sukemura, Multiple fracture propagation model for a three-dimensional hydraulic fracturing simulator, *International Journal of Geomechanics*, 4(1) (2004) 46-57.
- [9] A. Zerzar, Y. Bettam, Interpretation of multiple hydraulically fractured horizontal wells in closed systems, in: *Canadian International Petroleum Conference*, Petroleum Society of Canada, 2004.
- [10] G.A. Waters, B.K. Dean, R.C. Downie, K.J. Kerrihard, L. Austbo, B. McPherson, Simultaneous hydraulic fracturing of adjacent horizontal wells in the Woodford Shale, in: *SPE hydraulic fracturing technology conference*, Society of Petroleum Engineers, 2009.
- [11] C. Cheng, A.P. Bunger, Reduced order model for simultaneous growth of multiple closely-spaced radial hydraulic fractures, *Journal of Computational Physics*, 376 (2019) 228-248.
- [12] C. Cheng, A.P. Bunger, Optimizing fluid viscosity for systems of multiple hydraulic fractures, *AIChE Journal*, 65(5) (2019).
- [13] G. Lu, E. Gordeliy, R. Prioul, G. Aidagulov, A. Bunger, Modeling simultaneous initiation and propagation of multiple hydraulic fractures under subcritical conditions, *Computers and Geotechnics*, 104 (2018) 196-206.
- [14] I. Sneddon, The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid, in: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, 1946, pp. 229-

303

- [30] A. Golshani, T. Tran-Cong, Energy analysis of hydraulic fracturing, *KSCE Journal of Civil Engineering*, 13(4) (2009) 219-224.
- [31] J.E. Olson, Predicting fracture swarms—The influence of subcritical crack growth and the crack-tip process zone on joint spacing in rock, Geological Society, London, Special Publications, 231(1) (2004) 73-88
- [32] K. Wu, J.E. Olson, Simultaneous multifracture treatments: fully coupled fluid flow and fracture mechanics for horizontal wells, *SPE journal*, 20(02) (2015) 337-346.
- [33] J. Benthem, W. Koiter, Asymptotic approximations to crack problems, in: *Methods of analysis and solutions of crack problems*, Springer, 1973, pp. 131-178.
- handbook, New York: ASME Press, 2000.
- [26] R. Hoagland, J. Embury, A treatment of inelastic deformation around a crack tip due to microcracking, *Journal of the American Ceramic Society*, 63(7) (1980) 404-410.
- [27] A. Chudnovsky, M. Kachanov, Interaction of a crack with a field of microcracks, *International Journal of Engineering Science*, 21(8) (1983) 1009-1018.
- [28] L. Rose, Microcrack interaction with a main crack, *International journal of fracture*, 31(3) (1986) 233-242.
- [29] A. Golshani, Y. Okui, M. Oda, T. Takemura, A micromechanical model for brittle failure of rock and its relation to crack growth observed in triaxial compression tests of granite, *Mechanics of materials*, 38(4) (2006) 287-

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Asgari, A.A. Golshani, *Evaluation of Shadow Stress between Hydraulic Fractures*, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 53(2) (2021) 707-722.

DOI: [10.22060/ceej.2020.16566.6277](https://doi.org/10.22060/ceej.2020.16566.6277)



