

## پیشنهاد یک روش ساده اجزای محدود برای تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای چندلایه

محمد کارکن<sup>۱\*</sup>، سلیمان قوهستانی<sup>۲</sup>، سیدمحمد صابری زاده<sup>۳</sup>، مجید یعقوبی<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لارستان، لارستان، ایران

<sup>۲</sup> استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه فسا، فسا

<sup>۳</sup> دانش آموخته کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

<sup>۴</sup> استادیار، گروه مهندسی عمران و معماری، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربت حیدریه

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸-۰۱-۲۱

بازنگری: ۱۳۹۸-۰۱-۳۰

پذیرش: ۱۳۹۸-۰۲-۰۱

ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۰۲-۰۹

### کلمات کلیدی:

اجزای محدود

تیر چندلایه

ارتعاش آزاد

کمانش

**خلاصه:** در این مقاله یک جزء دو گرهی برپایه‌ی نگره‌ی برشی مرتبه یکم (FSDT)، برای تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای چندلایه متقارن پیشنهاد می‌گردد. برای رابطه‌سازی جزء، میدان جایجایی از درجه سوم و میدان دوران آن نیز از درجه دوم انتخاب می‌شود. هم‌چنین کرنش برشی جزء نیز مقداری ثابت فرض شده است. با نوشتن کارمایه کل تیر و ایستادن آن نسبت به کرنش برشی، تابع‌های درون‌یاب برای میدان جابه‌جایی و دوران تیر به صورت صریح محاسبه می‌شود. شایان ذکر است که با کاهش ضخامت تیر، تابع‌های درون‌یاب جزء پیشنهادی، به تابع‌های درونیاب جزء اولر-برنولی تبدیل می‌شوند و مشکل قفل برشی در آن رخ نمی‌دهد. با بهره‌جویی از این تابع‌های درون‌یاب، ماتریس سختی تیر محاسبه می‌شود. در ادامه با نوشتن معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد تیر، شکل صریح ماتریس جرم انتقالی و دورانی جزء پیشنهادی نیز محاسبه می‌شود. هم‌چنین، با بهره‌جویی از تابع‌های درون‌یاب، ماتریس سختی هندسی جزء نیز در دسترس قرار می‌گیرد. در پایان با آزمون‌های عددی پرشمار دقت و کارایی جزء پیشنهادی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. برای این منظور، تیرهای چندلایه متقارن با شرط‌های مرزی و نسبت طول به ضخامت گوناگون تحلیل می‌گردد. این آزمون‌ها نشان دهنده‌ی دقت بالای جزء در تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای چندلایه متقارن نازک و ضخیم می‌باشند. هم‌چنین، نبود مشکل قفل برشی در جزء پیشنهادی نیز به اثبات می‌رسد.

### ۱- مقدمه

تیر-های ضخیم که اثر تغییر شکل-های برشی تأثیرگذار می‌باشد، دو گونه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول<sup>۱</sup> (FSDT) و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا<sup>۲</sup> (HSDT) گسترش یافته‌اند. در نگره (FSDT) با توجه به پنداشت ثابت بودن کرنش برشی در هر مقطع تیر، تغییرات جابه‌جایی درون صفحه تیر در راستای ضخامت، خطی می‌باشد، اما خط جابه‌جایی در راستای ضخامت تیر بر میان-تار عمود نخواهد بود. این شیوه در تیرهای تا ضخامت متوسط، پاسخ با دقت مناسب را به دست می‌دهد. در مقابل، در نگره-ی (HSDT)، گر چه پاسخ دقیقتری را بخصوص در تیرهای با ضخامت بالا به دست

تیرهای چندلایه به دلیل خواصی نظیر مقاومت، سختی و سبکی دارای کاربردهای وسیعی در ساخت سازه‌های مختلف مهندسی مانند عمران، مکانیک و هوافضا می‌باشند. تاکنون، تئوری-های زیادی برای تحلیل این گونه سازه‌ها پیشنهاد شده است. در نگره-ی کلاسیک صفحات<sup>۱</sup> (CBT)، اثر برش وارد تغییر شکل صفحه نمی‌گردد. این شیوه، برای تیر-های نازک پاسخ مناسب را به دست می‌دهد ولی با افزایش ضخامت، خطای پاسخ نیز افزایش پیدا می‌کند. برای تحلیل

1 Classic beam theory

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: m.karkon@iaularestan.ac.ir

2 First order shear deformation theory  
3 Higher order shear deformation theory



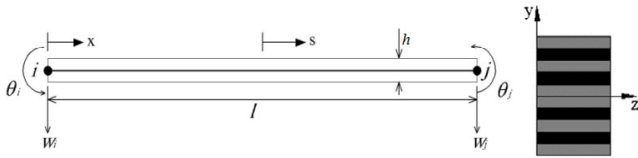
[۱۳، ۱۴]. شایان ذکر است جزء پیشنهادی توسط این پژوهشگران فاقد مشکل قفل برشی است. در سال ۲۰۱۲ جعفری تلوکلای و همکاران<sup>۱۱</sup>، با استفاده از راهکار ضرائب لاگرانژ، پاسخ تحلیلی ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه را ارائه کردند [۱۵]. در این سال وو و تهی<sup>۱۲</sup>، یک جزء دو گرهی با ده درجه آزادی را برای تحلیل ارتعاش و کمانش تیرهای چندلایه پیشنهاد کردند [۱۶]. لی و همکاران<sup>۱۳</sup>، پاسخ نگره-های گوناگون مرتبه-ی بالا برای ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه را بار روش اجزای محدود طیفی، مقایسه کردند. آنها برای اینکار یک جزء دو گرهی با هشت درجه آزادی را رابطه-سازی کردند [۱۷]. در سال ۲۰۱۵ وانگ و همکاران<sup>۱۴</sup>، روش اجزای محدود هم-هندسی را برای تحلیل کمانش تیرهای چندلایه بکار بردند [۱۸]. هم-چنین در این سال فیلیپی و همکاران<sup>۱۵</sup>، با استفاده از چندجمله-ای-های چبیشف تحلیل ایستایی و ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه را انجام دادند [۱۹]. در سال ۲۰۱۶، مانتاری و کانالز<sup>۱۶</sup> با استفاده از روش ریتز و بکار بردن سری-های مثلثاتی و سری-های پیوندی، پاسخ تحلیلی ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای چندلایه را بر پایه-ی نگره (HSDT) ارائه کردند [۲۰، ۲۱]. هم-چنین در این سال، کایا<sup>۱۷</sup> یک جزء درجه بالا بر پایه نگره برشی مرتبه یکم را، برای تحلیل کمانش تیرهای چندلایه پیشنهاد کرد [۲۲]. عثمان و همکاران<sup>۱۸</sup>، یک جزء سه گرهی را برای تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه رابطه-سازی کردند [۲۳]. در سال ۲۰۱۷ نگوین و همکاران<sup>۱۹</sup> با بهره-جویی از سری-های مثلثاتی، یک شیوه تحلیلی جدید بر پایه (HSDT) را، برای واکاوی ایستایی، کمانش و ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه پیشنهاد کردند [۲۴]. هم-چنین، آن-ها با استفاده از روش ریتز نیز، پاسخ تحلیلی ایستایی، کمانش و ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه را به-دست آوردند [۲۵]. غضنفری و همکاران<sup>۲۰</sup> نیز در سال ۲۰۱۹، بر پایه رابطه-سازی یک-پارچه کریرا (CUF) و استفاده از شیوه هم-هندسی، تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه را انجام دادند [۲۶]. یادآوری می-گردد که، یک مرور جامع بر مقالاتی که در زمینه تحلیل ایستایی، کمانش و

می-دهد، اما نیازمند تلاش محاسباتی بیشتری نسبت به (FSDT) است [۱].

یکی از موضوعات مهم در تحلیل تیرهای چندلایه، تحلیل ارتعاش آزاد آن می باشد. تا کنون شیوه-های گوناگونی برای حل تحلیلی و عددی ارتعاش آزاد این گونه تیرها پیشنهاد شده است. چاندارشخارا و همکاران<sup>۱</sup> بر پایه نگره برشی مرتبه یکم، یک شیوه تحلیلی را برای پاسخ ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه با شرط-های گوناگون مرزی ارائه کردند [۲]. هم-چنین خدیر و ردی<sup>۲</sup> نیز پاسخ تحلیلی ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه با چیدمان متعامد بر پایه نگره های گوناگون برشی، بدست آوردند [۳]. چاندارشخارا و بانجرا<sup>۳</sup> یک جزء محدود بر پایه (HSDT) را برای تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه پیشنهاد کردند [۴]. تا کنون پژوهش-های کمتری بر روی کمانش تیر نسبت به ارتعاش آزاد آن صورت پذیرفته است. خدیر و ردی پاسخ تحلیلی کمانش تیرهای چندلایه با چیدمان متعامد و شرطهای مختلف مرزی را ارائه کردند [۵]. در سال ۲۰۰۲، چاکرابورتی و همکاران<sup>۴</sup> بر پایه برش مرتبه یکم اصلاح شده تحلیل ارتعاش آزاد و انتشار موج را در تیرهای چندلایه با ناپیوستگی سازه-ای را مورد بررسی قرار دادند [۶]. چن و بین<sup>۵</sup> با گسسته سازی رابطه-های فضای حالت و بهره-جویی از فن مربعات دیفرانسیل، تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای چند لایه را انجام دادند [۷]. در سال ۲۰۰۵، مورتی و همکاران<sup>۶</sup> بر پایه نگره برشی مرتبه بالای اصلاح شده، یک جزء دو گرهی با هشت درجه آزادی را برای تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه نامتقارن پیشنهاد کردند [۸]. هم-چنین، آیدوگدو<sup>۷</sup> با راهکار ریتز، تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای با چیدمان متعامد و زاویه-ای را به انجام رسانید [۹-۱۱]. با بهره-جویی از رابطه-سازی یکپارچه کریرا (CUF)<sup>۸</sup>، کاتاپانو و همکاران<sup>۹</sup> تحلیل ایستایی تیرهای چندلایه را انجام دادند [۱۲]. لزگی نظرگاه و همکاران<sup>۱۰</sup> در سال ۲۰۱۱، بر پایه نگره برشی مرتبه بالای اصلاح شده، یک جزء سه گرهی با پیوستگی  $C^1$  را، برای تحلیل ایستایی و ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه پیشنهاد کردند

11 Jafari-Talookolaei et al.  
12 Vo and Thai  
13 Li et al.  
14 Wang et al.  
15 Filippi et al.  
16 Mantari and Canales  
17 Kahya  
18 Osman et al.  
19 Nguyen et al.  
20 Ghazanfari et al.

1 Chandrashekhara et al.  
2 Khdeir and Reddy  
3 Chandrashekhara and Bangera  
4 Chakraborty et al.  
5 Chen and Bian  
6 Murthy et al.  
7 Aydogdu  
8 Carrera's Unified Formulation  
9 Catapano et al.  
10 Lezgy-Nazargah et al.



شکل ۱. جزء تیر پیشنهادی  
Fig. 1. Proposed laminated beam element

$$s = \frac{2x}{l} - 1 \quad (4)$$

در رابطه-های کنونی عامل-های  $\beta_1, \beta_0, \alpha_0$  و  $\gamma_0$ ، مجهول می-باشند. برای یافتن این عامل-ها، نخست معادله کرنش برشی برای جزء تیموشنکو برپا می-گردد و مقدار آن برابر  $\gamma_0$  قرار داده می-شود:

$$\gamma = \frac{dw}{dx} - \theta = \frac{2}{l} \cdot \frac{dw}{ds} - \theta \quad (5)$$

$$\gamma_0 = \frac{2}{l} \left( -\frac{w_i}{2} + \frac{w_j}{2} - 2\beta_0 l s + \beta_1 l - 3\beta_1 l s^2 \right) - \quad (6)$$

$$\theta_i \left( \frac{1-s}{2} \right) - \theta_j \left( \frac{1+s}{2} \right) - \alpha_0 (1-s^2)$$

با توجه به رابطه-ی کنونی، ضریب جمله-های  $s$  و  $s^2$  مساوی صفر می-باشد. بنابراین عامل-های  $\beta_1, \alpha_0$  برحسب عامل مجهول  $\gamma_0$  به دست می-آید:

$$\beta_0 = \frac{1}{8} (\theta_i - \theta_j) \quad (7)$$

$$\alpha_0 = -\frac{3}{2} \left( \gamma_0 - \frac{1}{l} (w_j - w_i) + \frac{1}{2} (\theta_i + \theta_j) \right) \quad (8)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{6} \alpha_0 \quad (9)$$

شایان ذکر است که در تیرهای چندلایه متقارن، فقط عامل-های سختی خمشی  $D_{11}$  و سختی برشی  $A_{55}$  وجود دارند و سایر عامل-های سختی صفر می-باشند. این عامل-های سختی برای تیرهای چندلایه، به صورت زیر به دست می-آید:

$$D_{11} = b \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \bar{Q}_{11} dz \quad (10)$$

ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه منتشر شده است، توسط صیاد و قوگال<sup>۱</sup> انجام شده است [۲۷].

در این مقاله برای ارتعاش آزاد و پایداری تیرهای چندلایه متقارن، یک روش جدید اجزای محدود بر پایه-ی نگره-ی برشی مرتبه یکم پیشنهاد شده است. در بخش دوم مقاله، رابطه-های اجزای محدود جزء پیشنهادی آمده است. برای رابطه-سازی جزء، میدان جابه-جایی جزء از درجه سوم و میدان دوران آن از درجه دوم انتخاب شده است. هم-چنین کرنش برشی جزء نیز ثابت، فرض شده است. در ادامه، با بهره-جویی از تابع کارمایه-ی- خمشی و برشی تیر، تابع-های درون-یاب این جزء به صورت دقیق محاسبه شده است. بهره جویی از این تابع شکل-های دقیق، سبب از بین رفتن مشکل قفل برشی در هنگام نازک شدن تیر شده است. در بخش سوم و چهارم مقاله، با به کار بردن این تابع-های درون-یاب، ماتریس سختی، ماتریس سختی هندسی و ماتریس جرم جزء، به صورت صریح حساب شده است. با بهره-جویی از این ماتریس-ها در بخش پنجم مقاله، ارتعاش آزاد تیر و کماتش تیرهای چندلایه متقارن با شرایط مختلف تکیه-گاهی مورد ارزیابی قرار گرفته است. آزمون-های عددی، نشان دهنده-ی دقت بالای جزء پیشنهادی در تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد این گونه تیرها می-باشد.

## ۲- رابطه-سازی اجزای محدود

در روش اجزای محدود، میدان-های جابه-جایی و دوران جزء، با تابع-های درون-یاب به تغییرمکان-های گرهی وابسته می-گردد. شکل ۱ جزء دو گرهی پیشنهادی چند لایه را نشان می-دهد. برای محاسبه تابع درون-یاب جزء، میدان جایجایی از درجه سوم و میدان دوران از درجه دوم انتخاب می-گردد. هم-چنین فرض می-شود که کرنش برشی در تیر، مقدار ثابت  $\gamma_0$  می-باشد. بنابراین می-توان نوشت:

$$w = \frac{w_i}{2} (1-s) + \frac{w_j}{2} (1+s) + \beta_0 l (1-s^2) + \beta_1 l s (1-s^2) \quad (1)$$

$$\theta = \frac{\theta_i}{2} (1-s) + \frac{\theta_j}{2} (1+s) + \alpha_0 (1-s^2) \quad (2)$$

$$\gamma = \gamma_0 \quad (3)$$

$$U_b = U_0 + \frac{6D_{11}\gamma_0}{l} \left( \gamma_0 - \left( \frac{2}{l}(w_j - w_i) - (\theta_i + \theta_j) \right) \right) \quad (19)$$

$$U_0 = \frac{D_{11}l}{4} \int_{-1}^1 \kappa_0^2 ds \quad (20)$$

کارمایه-ی کرنش برشی نیز می-توان به صورت زیر نوشت:

$$U_s = \frac{A_{55}}{2} \int_0^l \gamma^2 dx = \frac{A_{55}l}{4} \int_{-1}^1 \gamma_0^2 ds = \frac{A_{55}l}{2} \gamma_0^2 \quad (21)$$

بنابراین کارمایه-ی کرنشی کل، با جمع کارمایه-ی خمشی و کارمایه-ی برشی به صورت زیر حاصل می-گردد:

$$U = U_b + U_s = U_0 - \frac{6D_{11}\gamma_0}{l} \left( \frac{2}{l}(w_j - w_i) - (\theta_i + \theta_j) \right) + \frac{6D_{11}}{l} \gamma_0^2 + \frac{A_{55}l}{2} \gamma_0^2 \quad (22)$$

چنان-چه مشتق کارمایه-ی کل نسبت به  $\gamma_0$  صفر گردد (  $\partial U / \partial \gamma_0 = 0$  )، عامل مجهول  $\gamma_0$  به صورت زیر، پیدا می-گردد:

$$\gamma_0 = \frac{6D_{11}}{A_{55}l^2 + 12D_{11}} \left( \frac{2}{l}(w_j - w_i) - (\theta_i + \theta_j) \right) = \delta \left( \frac{2}{l}(w_j - w_i) - (\theta_i + \theta_j) \right) \quad (23)$$

$$\delta = \frac{6\lambda}{l^2 + 12\lambda}, \quad \lambda = \frac{D_{11}}{A_{55}} \quad (24)$$

با جای-گذاری عامل-های  $\alpha_0, \beta_0, \beta_1$  و  $\gamma_0$ ، در رابطه-ها-ی (۱) و (۲) تابع-های درون-یاب برای جزء پیشنهادی شکل ۱ به صورت زیر به دست می-آید:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = [N] \{D\}_E = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ N_5 & N_6 & N_7 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (25)$$

$$A_{55} = bk_s \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{55} dz \quad (11)$$

در رابطه-های کنونی،  $b$  عرض تیر و  $k_s$  ضریب اصلاح برش مقطع تیر می-باشد. هم-چنین، عامل-های سختی  $\bar{Q}_{11}^{(k)}$  و  $\bar{Q}_{55}^{(k)}$  به صورت زیر حساب می-شود:

$$\bar{Q}_{11}^{(k)} = Q_{11}^{(k)} \cos^4 \theta_k + 2(Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22}^{(k)} \sin^4 \theta_k \quad (12)$$

$$\bar{Q}_{55}^{(k)} = Q_{44}^{(k)} \sin^2 \theta_k + Q_{55}^{(k)} \cos^2 \theta_k \quad (13)$$

$$Q_{11}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}, \quad Q_{12}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)} \nu_{12}^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}, \quad (14)$$

$$Q_{22}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}$$

$$Q_{44}^{(k)} = G_{23}^{(k)}, \quad Q_{55}^{(k)} = G_{13}^{(k)}, \quad Q_{66}^{(k)} = G_{12}^{(k)} \quad (15)$$

در این رابطه-ها  $\theta_k$ ، زاویه لایه  $k$  ام نسبت به محور  $x$  می-باشد. در ادامه برای یافتن  $\gamma_0$ ، مشتق کارمایه-ی کرنشی تیر نسبت به  $\gamma_0$  صفر می-گردد. کارمایه-ی کرنشی از جمع دو بخش کارمایه-ی خمشی و کارمایه-ی برشی حاصل می-شود. کارمایه-ی خمشی را می-توان به صورت زیر به دست آورد:

$$U_b = \frac{D_{11}}{2} \int_0^l \kappa^2 dx = \frac{D_{11}l}{4} \int_{-1}^1 \kappa^2 ds \quad (16)$$

در رابطه-ی کنونی،  $\kappa$ ، انحنای تیر می-باشد که به صورت زیر حساب می-شود:

$$\kappa = -\frac{2}{l} \cdot \frac{d\theta}{ds} = \kappa_0 - 6 \frac{s\gamma_0}{l} \quad (17)$$

$$\kappa_0 = \frac{1}{l} \left( \theta_i - \theta_j + 3s \left( \frac{2}{l}(w_j - w_i) - (\theta_i + \theta_j) \right) \right) \quad (18)$$

با جای-گذاری رابطه-های کنونی در معادله (۱۶)، کارمایه-ی حاصل از خمش به صورت زیر پیدا می-گردد:

به دست می-آید:

$$[D_m] = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \quad (30)$$

با محاسبه- رابطه-ی (۲۹)، ماتریس سختی جزء به صورت زیر

به دست می-آید:

$$[K_0] = \frac{D_{11}}{l^3 + 12l\lambda} \times \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 + 12\lambda & -6l & 2l^2 - 12\lambda \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 - 12\lambda & -6l & 4l^2 + 12\lambda \end{bmatrix} \quad (31)$$

### ۳- ماتریس جرم

کارمایه-ی جنبشی تیر با اثر برش را می-توان به صورت جمع دو

بخش کارمایه-ی جنبشی انتقالی و دورانی نوشت [۲۹]:

$$T = \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \rho A \dot{y}^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \rho I \dot{\theta}^2 dx \quad (32)$$

بنابراین ماتریس جرم جزء را می-توان به صورت زیر نوشت:

$$[M] = [M_1] + [M_2] = \frac{\rho b h l}{2} \int_1^1 [N_w]^T [N_w] ds + \frac{\rho b h^3 l}{24} \int_{-l/2}^{l/2} [N_\theta]^T [N_\theta] ds \quad (33)$$

ماتریس-جرم انتقالی  $[M_1]$  برای این جزء به صورت زیر به دست می-آید:

$$[M_1] = \frac{\rho b h l^5}{210(12\lambda + l^2)^2} \times \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{12} & m_{15} & -m_{14} & m_{16} \\ m_{13} & -m_{14} & m_{11} & -m_{12} \\ m_{14} & m_{16} & -m_{12} & m_{15} \end{bmatrix} \quad (34)$$

عامل-های ماتریس بالا، به صورت زیر تعریف می-شوند:

$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{6}{l^4} (1680\lambda^2 + 294l^2\lambda + 13l^4) \\ m_{12} &= \frac{1}{l^3} (1260\lambda^2 + 231l^2\lambda + 11l^4) \\ m_{13} &= \frac{9}{l^4} (560\lambda^2 + 84l^2\lambda + 3l^4) \\ m_{14} &= -\frac{1}{2l^3} (2520\lambda^2 + 378l^2\lambda + 13l^4) \\ m_{15} &= \frac{2}{l^2} (126\lambda^2 + 21l^2\lambda + 13l^4) \\ m_{16} &= -\frac{3}{2l^2} (168\lambda^2 + 28l^2\lambda + 13l^4) \end{aligned} \quad (35)$$

$$N_1 = \frac{1}{4} [2 + s^3(1 - 2\delta) + s(-3 + 2\delta)]$$

$$N_2 = \frac{l}{4} [0.5(1 - s^2) + (s^3 - s)(0.5 - \delta)]$$

$$N_3 = \frac{1}{4} [2 - s^3(1 - 2\delta) - s(-3 + 2\delta)]$$

$$N_4 = \frac{l}{4} [-0.5(1 - s^2) + (s^3 - s)(0.5 - \delta)] \quad (26)$$

$$N_5 = \frac{1}{4l} [6(1 - s^2)(-1 + 2\delta)]$$

$$N_6 = \frac{1}{4} [-1 + s(-2 + 3s) + 6(1 - s^2)\delta]$$

$$N_7 = \frac{1}{4l} [-6(1 - s^2)(-1 + 2\delta)]$$

$$N_8 = \frac{1}{4} [-1 + s(2 + 3s) + 6(1 - s^2)\delta]$$

یادآوری می گردد که، عامل  $\{D\}_E$  بردار تغییر مکان-های جزء

می باشد. در روش اجزای محدود، تغییر مکان-های درون جزء با

تابع-های درون-یاب به درجه آزادی-های گرهی جزء وابسته

می-گردند. هم-چنین می-توان کرنش نیز به درجه آزادی-های

گرهی وابسته نمود. بنابراین روابط کلی اجزای محدود را می-توان به

صورت زیر نوشت [۲۸]:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{dw}{dx} \\ -\frac{dw}{dx} + \theta \end{Bmatrix} = [B] \{D\}_E \quad (27)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx} & -1 \end{bmatrix} [N] \quad (28)$$

در این رابطه-ها  $[N]$  ماتریس تابع درون-یاب رابطه-ی (۲۵)

می-باشد، هم-چنین  $[B]$  ماتریس کرنش می-باشد. بنابراین ماتریس

سختی جزء تیموشنکو را می-توان از رابطه-ی زیر به دست آورد:

$$[K_0] = \int [B]^T [D_m] [B] dx \quad (29)$$

در رابطه-ی کنونی ماتریس  $[D_m]$ ، وابسته به خصوصیات مکانیکی

جسم می-باشد. برای جزء چندلایه متقارن این ماتریس به صورت زیر

با محاسبه-ی رابطه-ی بالا، ماتریس سختی هندسی به صورت زیر به دست می-آید:

$$[K_g] = \frac{P}{60l} \begin{bmatrix} k_{g1} & k_{g2} & k_{g3} & k_{g2} \\ k_{g2} & k_{g4} & -k_{g2} & k_{g5} \\ k_{g3} & -k_{g2} & k_{g1} & -k_{g2} \\ k_{g2} & k_{g5} & -k_{g2} & k_{g4} \end{bmatrix} \quad (41)$$

عامل-های ماتریس سختی هندسی کنونی، به صورت زیر می-باشند:

$$\begin{aligned} k_{g1} &= 60 + 12\beta \\ k_{g2} &= 6\beta l \\ k_{g3} &= -60 - 12\beta \\ k_{g4} &= 5l^2 + 3\beta l^2 \\ k_{g5} &= 3\beta l^2 - 5l^2 \\ \beta &= \frac{l^4}{(l^2 + 12\lambda)^2} \end{aligned} \quad (42)$$

کمانش زمانی رخ خواهد داد که سختی کل سازه صفر گردد. باید توجه داشت که ماتریس سختی کل سازه از روی هم-گذاری ماتریس سختی هر جزء سازه به دست می-آید. بنابراین بار بحرانی را می-توان با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس سختی کل سازه به دست آورد:

$$\det([K_t]) = \det([K] - P[K_G]) = 0 \Rightarrow P_{cr} \quad (43)$$

در رابطه-ی کنونی  $[K]$  و  $[K_G]$  به ترتیب، ماتریس سختی و ماتریس سختی هندسی کل سازه می-باشند. هم-چنین  $[K_t]$  نیز ماتریس سختی کل سازه با اثر نیروی محوری می-باشد. شایان ذکر است، کوچک-ترین مقدار ویژه-ی معادله (۴۳) بار کمانشی تیر خواهد بود.

#### ۵- آزمون-های عددی

به منظور سنجش دقت و کارایی جزء پیشنهادی، آزمون-های عددی در دو بخش تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای چندلایه انجام می-گردد و پاسخ-های جزء پیشنهادی با یافته-های دیگر پژوهشگران مقایسه می-شود. شایان ذکر است که در تمامی این

هم-چنین ماتریس-جرم دورانی  $[M_2]$  نیز، می-توان به صورت زیر به دست آورد:

$$[M_2] = \frac{\rho b h^3 l^2}{360(12\lambda + l^2)^2} \times \begin{bmatrix} m_{21} & m_{22} & -m_{21} & m_{22} \\ m_{22} & m_{23} & -m_{22} & m_{24} \\ -m_{21} & -m_{22} & m_{21} & -m_{12} \\ m_{22} & m_{24} & -m_{12} & m_{23} \end{bmatrix} \quad (36)$$

عامل-های بکار رفته در ماتریس کنونی به صورت زیر می-باشند:

$$\begin{aligned} m_{21} &= 36l \\ m_{22} &= -3(60\lambda - l^2) \\ m_{23} &= \frac{4}{l}(360\lambda^2 + 15l^2\lambda + 3l^4) \\ m_{24} &= \frac{1}{l}(720\lambda^2 - 60l^2\lambda - l^4) \end{aligned} \quad (37)$$

یادآوری می-گردد، برای تحلیل ارتعاش آزاد و به دست آوردن فرکانس-های طبیعی تیر  $(\omega_i)$ ، باید مسأله مقدار ویژه-ی زیر را حل کرد:

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (38)$$

در رابطه-ی کنونی، عامل-های  $[K]$  و  $[M]$  به ترتیب، ماتریس سختی و ماتریس جرم کل سازه می-باشند.

#### ۴- ماتریس سختی هندسی

برای تحلیل کمانش از مفهوم تعادل خنثی استفاده می-شود. تیر در وضعیت تعادل خنثی می-تواند هر دو شکل مستقیم و یا خم شده را داشته باشد. با فرض کوچک بودن تغییرمکان-ها، میزان کار بار خارجی ناشی از کمانش خمشی را می-توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta W = \frac{P}{2} \int_0^l \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (39)$$

در رابطه-ی کنونی  $P$  نیروی محوری می-باشد. بنابراین با توجه به معادله (۳۹) ماتریس سختی هندسی جزء به صورت زیر حساب می-شود:

$$[K_g] = \int_0^l \left[ \frac{dN_w}{dx} \right]^T P \left[ \frac{dN_w}{dx} \right] dx \quad (40)$$

جدول ۱. بسامدهای طبیعی ( $kHz$ ) تیر یک لایه چندسانگرد ساخته شده از ماده گرافن-اپوکسی با تکیه گاه های ساده

Table 1. Natural Frequencies of simply supported orthotropic beam with one layer made of graphene-epoxy

روش	تعداد جزء	شماره مود				
		۱	۲	۳	۴	۵
جزء پیشنهادی	۲	۰/۷۶۷	۳/۵۸۱	۸/۵۹۱	۱۹/۶۶۱	-
	۴	۰/۷۵۸	۲/۶۴۹	۵/۳۰۲	۱۴/۰۱۹	۱۸/۴۵۳
	۸	۰/۷۵۶	۲/۵۷۳	۴/۸۷۳	۷/۴۶۲	۱۰/۳۱۸
	۱۶	۰/۷۵۵	۲/۵۵۴	۴/۷۵۵	۷/۰۸۶	۹/۴۸۶
	۳۲	۰/۷۵۵	۲/۵۴۹	۴/۷۲۶	۶/۹۹۲	۹/۲۶۷
چاندارشخارا و همکاران [۲]	-	۰/۷۵۵	۲/۵۴۸	۴/۷۱۶	۶/۹۶۰	۹/۱۹۴
چاکرابورتی و همکاران [۶]	۱۰	۰/۷۵۵	۲/۵۶۳	۴/۸۱۶	۷/۲۸۳	۹/۹۳۵
نگره کلاسیک [۳۰]	-	۰/۸۱۳	۳/۲۵۰	۷/۳۱۴	۱۳/۰۰۲	۲۰/۳۱۶

آزمون-ها، ضریب اصلاح برش تیر  $k_s = 5/6$  پنداشته می-شود.

۱-۵- آزمون عددی یکم (تحلیل ارتعاش آزاد)

در این بخش دقت جزء پیشنهادی در تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای چندلایه متقارن مورد ارزیابی قرار می-گیرد. برای این منظور، ابتدا یک تیر یک لایه چندسانگرد ساخته شده از ماده گرافن-اپوکسی با مشخصات زیر تحلیل می-گردد [۲]:

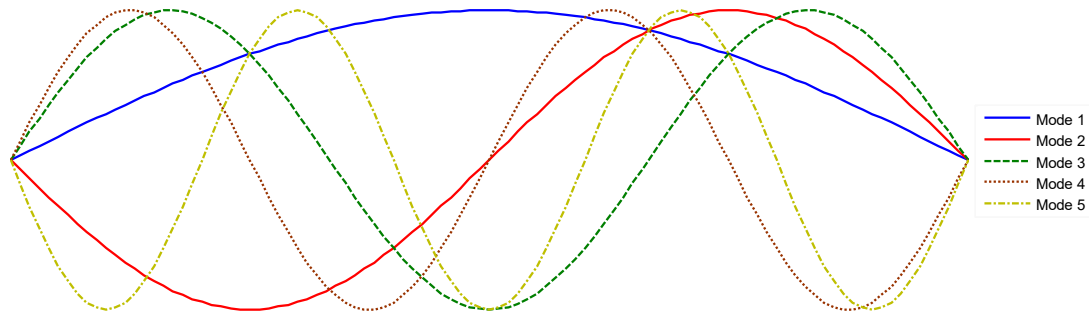
$$\begin{aligned}
 E_1 &= 144.84 \text{ GPa}, \\
 E_2 &= 9.65 \text{ GPa}, \\
 G_{23} &= 3.45 \text{ GPa} \\
 G_{12} &= G_{13} = 4.14 \text{ GPa}, \\
 \nu_{12} &= 0.3, \\
 \rho &= 1389.79 \text{ kg/m}^3
 \end{aligned}
 \tag{۴۴}$$

شکلی تیر برای پنج مود اول نیز در شکل ۲ نشان داده شده است. به منظور بهتر نشان دادن کارایی جزء پیشنهادی در تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای چند لایه، یک تیر چهار لایه ساخته شده از ماده گرافن-اپوکسی با زاویه-های مختلف برای لایه-ها و با چیدمان  $[\theta^\circ, -\theta^\circ, -\theta^\circ, \theta^\circ]$ ، تحلیل می-گردد. در این حالت نیز، عامل بدون بعد بسامد زاویه-ای اصلی تیر برای شرط-های مختلف تکیه-گاهی و نسبت- طول به ضخامت  $l/h = 15$  حساب می-گردد. یادآوری می-گردد که، عامل بدون بعد بسامد زاویه-ای تیر چندلایه به صورت زیر حساب می-گردد:

$$\bar{\omega} = \left( \frac{\omega l^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho}{E_1}}
 \tag{۴۵}$$

این تیر، با بکار بردن ۱۶ جزء تحلیل می-شود. پاسخ-های جزء پیشنهادی به همراه نتایج سایر پژوهشگران در جدول ۲ درج شده است. شایان ذکر است، در این جدول تکیه-گاه ساده با حرف S،

این تیر دارای تکیه-گاه-های ساده و نسبت ضخامت به طول برابر  $l/h = 15$  می-باشد. با به کار بردن تعداد جزء-های متفاوت تیر مورد نظر تحلیل می-شود و بسامدهای طبیعی پنج مود اول آن بر حسب کیلو هرتز حساب می-گردد. نتیجه-ی تحلیل جزء پیشنهادی به همراه پاسخ سایر پژوهشگران در جدول ۱ درج شده است. یادآوری می-گردد که پاسخ-های چاندارشخارا و همکاران [۲] به صورت تحلیلی بر پایه برش مرتبه یکم می-باشد. هم-چنین یافته-های



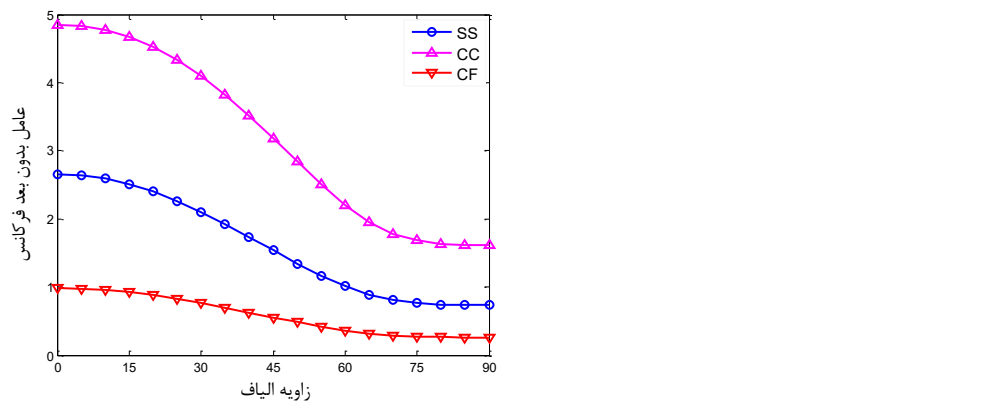
شکل ۲. حالت‌های تغییرشکلی پنج‌مود اول تیر یک لایه گرافن-اپوکسی با تکیه‌گاه‌های ساده

Fig. 2. First five mode shapes of the simply supported orthotropic beam made of graphene-epoxy

جدول ۲. بسامد زاویه‌های اصلی بدون بعد برای تیر چهار لایه با چیدمان  $[\theta^\circ, -\theta^\circ, -\theta^\circ, \theta^\circ]$

Table 2. Non-dimensional fundamental frequency of four layered beam with  $[\theta^\circ, -\theta^\circ, -\theta^\circ, \theta^\circ]$

شرط‌های تکیه‌گاهی	روش	زاویه $\theta^\circ$						
		۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰
SS	نگوین و همکاران [۲۴]	۲/۶۵۶۳	۲/۵۱۰۸	۲/۱۰۳۳	۱/۵۳۶۷	۱/۰۱۲۱	۰/۷۶۰۸	۰/۷۳۱۷
	چاندارشخارا و همکاران [۲]	۲/۶۵۶۰	۲/۵۱۰۵	۲/۱۰۳۲	۱/۵۳۶۸	۱/۰۱۲۴	۰/۷۶۱۱	۰/۷۳۲۰
	جزء پیشنهادی	۲/۶۵۶۶	۲/۵۱۱۰	۲/۱۰۳۵	۱/۵۳۶۹	۱/۰۱۲۴	۰/۷۶۱۱	۰/۷۳۲۰
CC	نگوین و همکاران [۲۴]	۴/۹۱۱۶	۴/۷۱۷۳	۴/۱۳۰۷	۳/۱۹۷۳	۲/۲۰۲۹	۱/۶۸۲۵	۱/۶۲۰۵
	چاندارشخارا و همکاران [۲]	۴/۸۴۸۷	۴/۶۶۳۵	۴/۰۹۸۱	۳/۱۸۴۳	۲/۱۹۸۴	۱/۶۸۱۵	۱/۶۲۰۰
	جزء پیشنهادی	۴/۸۵۲۲	۴/۶۶۶۷	۴/۱۰۰۳	۳/۱۸۵۴	۲/۱۹۸۸	۱/۶۸۱۶	۱/۶۱۹۹
CF	نگوین و همکاران [۲۴]	۰/۹۸۳۲	۰/۹۲۵۹	۰/۷۶۸۳	۰/۵۵۵۳	۰/۳۶۳۱	۰/۲۷۲۲	۰/۲۶۱۸
	چاندارشخارا و همکاران [۲]	۰/۹۸۲۰	۰/۹۲۴۹	۰/۷۶۷۸	۰/۵۵۵۱	۰/۳۶۳۱	۰/۲۷۲۳	۰/۲۶۱۹
	جزء پیشنهادی	۰/۹۸۲۱	۰/۹۲۴۹	۰/۷۶۷۸	۰/۵۵۵۲	۰/۳۶۳۱	۰/۲۷۲۳	۰/۲۶۱۹



شکل ۳. اثر زاویه الیاف بر روی عامل بدون بعد فرکانس تیر چهار لایه با چیدمان  $[\theta^\circ, -\theta^\circ, -\theta^\circ, \theta^\circ]$

Fig. 3. Effects of the fiber angle change on the nondimensional fundamental frequency of  $[\theta^\circ, -\theta^\circ, -\theta^\circ, \theta^\circ]$  laminated beams with various boundary conditions



جدول ۳. بسامد زاویهای اصلی بدون بعد برای تیر سه لایه با چیدمان  $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$

Table 3. Non-dimensional fundamental frequency of three layered beam with  $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$

روش	$\underline{l}$	شرطهای تکیه‌گاهی			
		SS	SC	CC	CF
نگوین و همکاران [۲۵]	۵	۹/۲۰۶	-	۱۱/۶۰۱	۴/۲۳۰
مورتی و همکاران [۸]		۹/۲۰۷	۱۰/۲۳۸	۱۱/۶۰۲	۴/۲۳۰
وو و ته‌ای [۱۶]		۹/۲۰۵	-	-	-
خدیر و ردی [۳]		۹/۲۰۵	۹/۶۵۲	۱۰/۴۳۲	۴/۱۳۴
جزء پیشنهادی		۹/۲۱۶	۹/۶۶۴	۱۰/۴۴۷	۴/۱۳۵
نگوین و همکاران [۲۵]	۱۰	۱۳/۶۰۷	-	۱۹/۷۰۷	۵/۴۹۰
مورتی و همکاران [۸]		۱۳/۶۱۱	۱۶/۶۰۰	۱۹/۷۱۹	۵/۴۹۱
وو و ته‌ای [۱۶]		۱۳/۶۶۵	-	-	-
خدیر و ردی [۳]		۱۳/۶۷۰	۱۶/۳۳۵	۱۹/۰۵۱	۵/۴۷۹
جزء پیشنهادی		۱۳/۶۷۹	۱۶/۳۵۰	۱۹/۰۷۵	۵/۴۸۰
نگوین و همکاران [۲۵]	۵۰	۱۷/۴۴۹	-	۳۷/۶۲۹	۶/۲۶۲
وو و ته‌ای [۱۶]		۱۷/۴۵۶	-	-	-
جزء پیشنهادی		۱۷/۴۶۹	۲۶/۶۸۲	۳۷/۶۷۰	۶/۲۶۷

برای راحتی مقایسه پاسخ-ها، عامل بدون بعد بسامد زاویه-ای اصلی تیر چندلایه، به صورت زیر حساب می-شود:

$$\bar{\omega} = \left( \frac{\omega l^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (47)$$

پاسخ-های جزء پیشنهادی به همراه نتایج سایر پژوهشگران در جدول ۳ درج شده است. در این جدول پاسخ-های خدیر و ردی [۳] و نیز وو و ته‌ای [۱۶] بر پایه نگره برشی مرتبه یکم می-باشد. هم-چنین، پاسخ-های مرجع [۲۵] و [۸] بر پایه-نگره برشی مرتبه بالا به دست آمده است. بررسی این جدول نشان می-دهد که جزء پیشنهادی از دقت بالایی در تحلیل تیر با ضخامت-های مختلف و شرط-های گوناگون تکیه-گاهی برخوردار است. هم-چنین، مشاهده می-شود که پاسخ-های جزء پیشنهادی به نتایج خدیر و ردی [۳] که با شیوه تحلیلی به دست آمده است، بسیار نزدیک است.

#### ۵-۲- آزمون عددی دوم (تحلیل کمناش)

به منظور سنجش دقت و کارایی جزء پیشنهادی در تحلیل کمناش تیرهای چندلایه، یک تیر سه-لایه متقارن با چیدمان متعامد

تکیه-گاه گیردار با حرف C و تکیه-گاه آزاد تیر با حرف F نشان داده شده است (به عنوان نمونه علامت SS بیان-گر تیر با هر دو تکیه-گاه ساده می-باشد). این جدول نشان می-دهد که جزء پیشنهادی در تحلیل تیرهای چندلایه با چیدمان زاویه-ای نیز از دقت بالایی برخوردار می-باشد. هم-چنین، مشاهده می-شود که پاسخ-های جزء پیشنهادی به نتایج مرجع [۲] که مبنای تحلیلی دارد بسیار نزدیک است. به منظور بهتر نشان دادن اثر زاویه الیاف بر روی بسامد طبیعی این تیر، تغییرات عامل بدون بعد فرکانس نسبت به زاویه الیاف برای شرط-های مختلف تکیه-گاهی در شکل ۳ نشان داده شده است.

در ادامه یک تیر سه-لایه متقارن با چیدمان متعامد لایه-ها- به صورت  $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$  و با شرایط مختلف تکیه-گاهی و نسبت-های طول به ضخامت  $l/h = 5$ ،  $l/h = 10$  و  $l/h = 50$  تحلیل می-گردد و پاسخ جزء پیشنهادی با نتایج سایر پژوهشگران مقایسه می-شود. این تیر، با بکار بردن ۱۶ جزء پیشنهادی تحلیل می-شود. هم-چنین، مشخصات مواد برای هر لایه تیر به صورت زیر می-باشد:

$$\begin{aligned} E_1 &= 40E_2, & G_{12} &= G_{13} = 0.6E_2, \\ G_{23} &= 0.5E_2, & \nu_{12} &= 0.25 \end{aligned} \quad (46)$$

جدول ۴. عامل بدون بعد کمانش برای تیر سه لایه با چیدمان  $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$

Table 4. Non-dimensional buckling load of three layered beam with  $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$

روش	$l$	شرط‌های تکیه‌گاهی			
		SS	SC	CC	CF
کایا [۲۲]	۵	۸/۵۸۵	۹/۴۹۲	۱۰/۹۷۱	-
مانتاری و کانالز [۲۰]		۸/۵۸۵	۱۰/۱۹۲	۱۱/۵۰۲	۴/۶۷۳
نگوین و همکاران [۲۴]		۸/۶۱۳	-	۱۱/۶۵۲	۴/۷۰۸
خدیر و ردی [۵]		۸/۶۰۶	۹/۴۱۲	۱۰/۸۰۲	۴/۷۴۷
جزء پیشنهادی		۸/۶۱۲	۹/۴۱۸	۱۰/۸۱۳	۴/۷۴۸
کایا [۲۲]	۱۰	۱۸/۸۸۵	۲۵/۸۲۸	۳۴/۳۴۵	-
مانتاری و کانالز [۲۰]		۱۸/۷۹۶	۲۷/۰۹۰	۳۴/۳۶۵	۶/۷۵۷
نگوین و همکاران [۲۴]		۱۸/۸۳۲	-	۳۴/۴۵۳	۶/۷۷۲
خدیر و ردی [۵]		۱۸/۹۸۹	۲۵/۹۴۰	۳۴/۴۲۶	۶/۷۹۷
جزء پیشنهادی		۱۹/۰۰۴	۲۵/۹۷۴	۳۴/۵۱۳	۶/۷۸۰
نگوین و همکاران [۲۴]	۵۰	۳۰/۹۰۶	-	۱۱۴/۳۹۸	۷/۸۸۶
جزء پیشنهادی		۳۰/۹۳۱	۶۱/۲۸۸	۱۱۴/۸۳۰	۷/۸۸۷

است. هم-چنین، مشاهده می-شود که پاسخ-های جزء پیشنهادی به نتایج خدیر و ردی [۵] که با شیوه تحلیلی به دست آمده است، بسیار نزدیک است.

#### ۶- نتیجه-گیری

در این مقاله یک جزء کارآ و با دقت بالا برای تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای چندلایه متقارن پیشنهاد شد. جزء پیشنهادی دارای دو گره و چهار درجه آزادی می-باشد. هم-چنین، رابطه سازی جزء بر پایه برش مرتبه یکم انجام شد. برای رابطه-سازی اجزای محدود، میدان جابه-جایی جزء از درجه-ی سه، میدان دوران آن از درجه-ی دو و کرنش برشی آن نیز ثابت اختیار گردید. با بهره جویی از تابع کارمایه-ی خمشی و برشی تیر و کمینه کردن آن کرنش برشی تیر حساب گردید. با یافتن دیگر عامل-های مجهول تابع میدان جابه-جایی و دوران جزء و هم-چنین به کار بردن کرنش برشی محاسبه شده، تابع-های درون-یاب جزء، به دست آمد. در ادامه با به کار بردن این تابع-های درون-یاب ماتریس-سختی، ماتریس سختی هندسی و ماتریس جرم جزء پیشنهادی به صورت صریح به دست آمده است. در پایان برای نشان دادن کارآیی و دقت جزء در

لایه-ها- به صورت  $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$  و با شرایط مختلف تکیه-گاهی و نسبت-های طول به ضخامت  $l/h = 5$ ،  $l/h = 10$  و  $l/h = 50$  تحلیل می-گردد و با یافته-های دیگر پژوهشگران مقایسه می-شود. شایان ذکر است در این حالت نیز برای تحلیل تیر، ۱۶ جزء به-کار می-رود. همچنین، مشخصات مواد برای هر لایه، در رابطه (۴۶) آمده است. برای راحتی مقایسه پاسخ-ها، عامل بدون بعد بار کمانش، به صورت زیر حساب می-شود:

$$\bar{P}_{cr} = \frac{P_{cr} l^2}{E_2 b h^3} \quad (48)$$

پاسخ-های جزء پیشنهادی به همراه نتایج سایر پژوهشگران در جدول ۴ درج شده است. شایان ذکر است که، پاسخ-های خدیر و ردی [۵] بر پایه برش مرتبه یکم و با شیوه تحلیلی به دست آمده است. کایا [۲۲] نیز با استفاده از یک جزء ۵ گرهی درجه بالا بر پایه برش مرتبه یکم، بار کمانشی را بدست آورده است. پاسخ-های مانتاری و کانالز [۲۰] و همچنین، نگوین و همکاران [۲۴] نیز بر پایه-نگره برشی مرتبه بالا به دست آمده است. بررسی این جدول نشان می-دهد که جزء پیشنهادی از دقت بالایی در تحلیل کمانش تیر با ضخامت-های مختلف و شرط-های گوناگون تکیه-گاهی برخوردار

- International Journal of Mechanical Sciences, 47(11) (2005) 1740-1755.
- [10] M. Aydogdu, Free vibration analysis of angle-ply laminated beams with general boundary conditions, Journal of reinforced plastics and composites, 25(15) (2006) 1571-1583.
- [11] M. Aydogdu, Buckling analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, Composites Science and Technology, 66(10) (2006) 1248-1255.
- [12] A. Catapano, G. Giunta, S. Belouettar, E. Carrera, Static analysis of laminated beams via a unified formulation, Composite structures, 94(1) (2011) 75-83.
- [13] M. Lezgy-Nazargah, M. Shariyat, S. Beheshti-Aval, A refined high-order global-local theory for finite element bending and vibration analyses of laminated composite beams, Acta Mechanica, 217(3-4) (2011) 219-242.
- [14] M. Lezgy-Nazargah, S. Beheshti-Aval, M. Shariyat, A refined mixed global-local finite element model for bending analysis of multi-layered rectangular composite beams with small widths, Thin-Walled Structures, 49(2) (2011) 351-362.
- [15] R.A. Jafari-Talookolaei, M. Abedi, M.H. Kargarnovin, M.T. Ahmadian, An analytical approach for the free vibration analysis of generally laminated composite beams with shear effect and rotary inertia, International Journal of Mechanical Sciences, 65(1) (2012) 97-104.
- [16] T.P. Vo, H.-T. Thai, Vibration and buckling of composite beams using refined shear deformation theory, International Journal of Mechanical Sciences, 62(1) (2012) 67-76.
- [17] J. Li, Z. Wu, X. Kong, X. Li, W. Wu, Comparison of various shear deformation theories for free vibration of laminated composite beams with general lay-ups, Composite structures, 108 (2014) 767-778.
- [18] X. Wang, X. Zhu, P. Hu, Isogeometric finite element method for buckling analysis of generally laminated composite beams with different boundary conditions, International Journal of Mechanical Sciences, 104 (2015) 190-199.
- تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای چندلایه، آزمون-های پرشماری با نسبت‌های مختلف طول به ضخامت و شرط-های مرزی انجام شد. نتایج این آزمون-ها، دقت و کارایی بالای جزء پیشنهادی را در تحلیل ارتعاش و کمانش تیرهای چندلایه در حالت-های مختلف را به اثبات می-رسانند.

## مراجع

- [1] Y. Ghugal, R. Shimpi, A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams, Journal of reinforced plastics and composites, 20(3) (2001) 255-272.
- [2] K. Chandrashekhara, K. Krishnamurthy, S. Roy, Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear deformation, Composite Structures, 14(4) (1990) 269-279.
- [3] A. Khdeir, J. Reddy, Free vibration of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions, International Journal of Engineering Science, 32(12) (1994) 1971-1980.
- [4] K. Chandrashekhara, K.M. Bangera, Free vibration of composite beams using a refined shear flexible beam element, Computers & structures, 43(4) (1992) 719-727.
- [5] A. Khdeir, J. Redd, Buckling of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions, Composite Structures, 37(1) (1997) 1-3.
- [6] A. Chakraborty, D.R. Mahapatra, S. Gopalakrishnan, Finite element analysis of free vibration and wave propagation in asymmetric composite beams with structural discontinuities, Composite Structures, 55(1) (2002) 23-36.
- [7] W. Chen, C. Lv, Z. Bian, Free vibration analysis of generally laminated beams via state-space-based differential quadrature, Composite Structures, 63(3-4) (2004) 417-425.
- [8] M. Murthy, D.R. Mahapatra, K. Badarinarayana, S. Gopalakrishnan, A refined higher order finite element for asymmetric composite beams, Composite Structures, 67(1) (2005) 27-35.
- [9] M. Aydogdu, Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method,

- [25] N.-D. Nguyen, T.-K. Nguyen, T.P. Vo, H.-T. Thai, Ritz-Based Analytical Solutions for Bending, Buckling and Vibration Behavior of Laminated Composite Beams, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 18(11) (2018) 1850130.
- [26] S. Ghazanfari, S. Hamzehei-Javaran, A. Alesadi, S. Shojaee, Free vibration analysis of cross-ply laminated beam structures using refined beam theories and B-spline basis functions, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, (2019) 1-9.
- [27] A.S. Sayyad, Y.M. Ghugal, Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature, *Composite Structures*, 171 (2017) 486-504.
- [28] A. Moallemi-Oreh, M. Karkon, Finite element formulation for stability and free vibration analysis of Timoshenko beam, *Advances in Acoustics and Vibration*, 2013 (2013).
- [29] M. Petyt, *Introduction to finite element vibration analysis*, Cambridge university press, 2010.
- [30] J.R. Vinson, R.L. Sierakowski, *The behavior of structures composed of composite materials*, Springer Science & Business Media, 2006.
- [19] M. Filippi, A. Pagani, M. Petrolo, G. Colonna, E. Carrera, Static and free vibration analysis of laminated beams by refined theory based on Chebyshev polynomials, *Composite Structures*, 132 (2015) 1248-1259.
- [20] J. Mantari, F. Canales, Free vibration and buckling of laminated beams via hybrid Ritz solution for various penalized boundary conditions, *Composite Structures*, 152 (2016) 306-315.
- [21] F. Canales, J. Mantari, Buckling and free vibration of laminated beams with arbitrary boundary conditions using a refined HSDT, *Composites Part B: Engineering*, 100 (2016) 136-145.
- [22] V. Kahya, Buckling analysis of laminated composite and sandwich beams by the finite element method, *Composites Part B: Engineering*, 91 (2016) 126-134.
- [23] M.Y. Osman, O.M.E. Suleiman, Free vibration analysis of laminated composite beams using finite element method, *International Journal of Engineering Research and Advanced Technology (IJERAT)*, 3(2) (2017) 5-22.
- [24] T.-K. Nguyen, N.-D. Nguyen, T.P. Vo, H.-T. Thai, Trigonometric-series solution for analysis of laminated composite beams, *Composite Structures*, 160 (2017) 142-151.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Karkon, S. Ghouhestani, S.M. Saberizadeh, M. Yaghoobi, A new simple finite element method for free vibration and buckling analysis of symmetrically laminated beams, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 52(9) (2020) 2243-2254.

DOI: [10.22060/ceej.2019.16111.6128](https://doi.org/10.22060/ceej.2019.16111.6128)

