

مدلسازی عددی امواج فوق بحرانی در خمها با روش حجم محدود Roe-TVD و ارزیابی فرضیات راه حل تحلیلی

علیرضا شمخالچیان^{۱*}؛ محمدرضا جعفرزاده^۲

چکیده

در این تحقیق جریان فوق بحرانی در کانال خمیده رینر و هاگر با روش عددی حجم محدود Roe-TVD مطالعه شده و با روش تحلیلی ناپ-ایپن، روش عددی HLL و داده‌های آزمایشگاهی موجود رینر و هاگر مقایسه گردید. آنگاه با استفاده از نتایج روش عددی، درستی فرضیات راه حل تحلیلی ارزیابی شده و دیده شد که امواج مورب فوق بحرانی ایستا در مسیر خود در خم پخش می‌شوند. در اعداد فرود ورودی $Fr_0 < 4/2$ ، فرض‌های ثابت بودن سرعت متوسط مقطع در طول خم و بدون اصطکاک بودن جریان یا ثابت بودن انرژی مخصوص با خطای حدود یک درصد قابل قبول است و تغییرات سرعت در دیوار خارجی با خطای حداکثر چهار درصد قابل چشم پوشی است. با افزایش عدد فرود ورودی، جریان در دیواره داخلی خم خشک می‌شود و فرضیات فوق بی اعتبار می‌شوند.

کلمات کلیدی

کانال‌های خمیده، جریان فوق بحرانی، امواج مورب ایستا، حجم محدود.

Numerical Modeling of Supercritical Waves in Bends with the Finite Volume Method of Roe-TVD and Appraisal of Analytical Assumptions

A. R. Shamkhalchian; M. R. Jaefarzadeh

ABSTRACT

In this research, using the finite volume method of Roe-TVD, supercritical flow in the curved channel of Reinauer and Hager was studied and the results were compared with the analytical method of Knapp-Ippen, the numerical method of HLL and the available experimental data of Reinauer and Hager. Then, using the numerical results, the accuracy of the assumptions of the analytical method was evaluated. It was observed that the super-critical oblique standing waves are diffused along the bend way. With an inlet Froude number, $Fr_0 < 4.2$, the assumptions of constant average cross-sectional velocity along the bend and frictionless flow or constant specific energy is acceptable with an error of around one percent and the velocity variation at the external wall is tolerable with a maximum error of four percent. By increasing the inlet Froude number, flow at the internal wall dries up and the above assumptions are invalidated.

KEYWORDS

Curved channels, Supercritical flow, Oblique standing waves, Finite volume.

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۸/۶/۳

تاریخ اصلاحات مقاله: ۱۳۸۹/۱۰/۱۸

* نویسنده مسئول و کارشناس ارشد آب، دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد؛ shamkhalchian_alireza@yahoo.com

^۲ استاد، گروه عمران - دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد؛ jafar zad@um.ac.ir



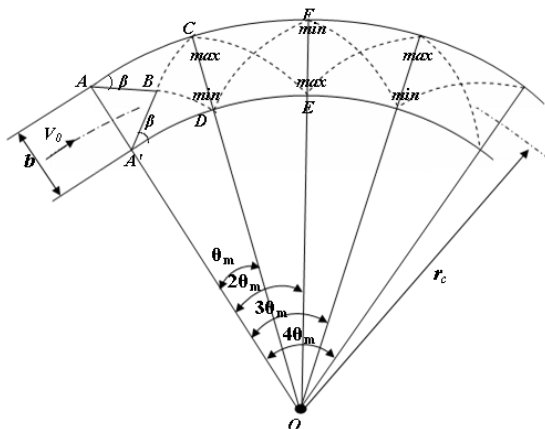
۱- مقدمه

که پس از تشکیل اولین موج در زاویه θ_m ، مجموعه امواج متوالی با فراز و نشیب های پی در پی در امتداد خم در زوایای $(\dots, 3\theta_m, 2\theta_m)$ ، به طور دقیق و بدون استهلاک طبق شکل (۱) توسعه پیدا می کنند [۲].

کارمن با اعمال فرض های ۱- جریان دو بعدی در کانال افقی با مقطع مستطیلی ۲- سرعت متوسط ثابت بر سطح مقطع ۳- جریان بدون اصطکاک، رابطه بین θ و Fr را به دست آورد [۱]:

$$\theta = \sqrt{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{Fr^2 - 1}} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{Fr^2 - 1}} + \theta_0 \quad 0 < \theta < \theta_m \quad (3)$$

θ زاویه خم از ابتدای آن، θ_0 مقدار ثابت و $Fr = V/\sqrt{gh}$ عدد فرود است. h عمق آب دیواره خارجی در زاویه θ و V سرعت متوسط مقطع است، (طبق فرض $V=V_0$) در دهانه ورودی خم، $\theta=0$ و عدد فرود مشخص است، بنابراین می توان مقدار ثابت θ_0 را محاسبه نمود.



شکل (۱): تشکیل امواج مورب جریان فوق بحرانی در یک خم [۸]

ناپ و ایین فرض های اول و دوم کارمن را پذیرفتند و رابطه (۴) را برای نیمرخ سطح آب در دیوار خارجی و داخلی ارائه نمودند [۲]، [۹]:

$$\frac{h}{h_0} = Fr_0^2 \sin^2 \left(\beta \pm \frac{\theta}{2} \right) \quad 0 < \theta < \theta_m \quad (4)$$

که در آن، h ارتفاع آب در زاویه θ و h_0 ارتفاع آب در کانال ورودی به خم تعریف می شود. اگر از رابطه (۱) موقعیت فراز موج تعیین شود می توان با استفاده از رابطه (۳) یا (۴) ارتفاع بیشینه آن را محاسبه نمود. مطالعات آزمایشگاهی ناپ و ایین نشان داد که سرعت مماسی در دیواره خارجی به نسبت ثابت است.

۳- معادلات آب های کم عمق

با استفاده از معادلات آب های کم عمق، مشخصات جریان فوق بحرانی در کانال های خمیده به دست می آید. شکل

هنگامی که یک جریان فوق بحرانی وارد کانال خمیده ای می شود بر اثر انحنای دیواره های کانال مجموعه ای از امواج مورب در سطح آب به وجود می آیند. یافتن شکل کلی، موقعیت و ارتفاع این امواج در دیواره ها مورد علاقه محققین بوده است. کارمن [۱] و همچنین ناپ و ایین [۲] از اولین کسانی بودند که با اعمال فرض هایی، روابط تحلیلی برای تعیین موقعیت امواج و ارتفاع سطح آب در خم به دست آوردند. هارت، لئا، استفلر و طاهر شمسی نیز از محققینی بودند که روابط تحلیلی دیگری برای جریان فوق بحرانی در خم ارائه نمودند [۳]. رینر و هاگر [۴]، طاهر شمسی [۳]، پوگی [۵] و بلترامی و همکاران [۶] بطور آزمایشگاهی این نوع جریان ها را بررسی نمودند. در سال های اخیر از روش های عددی برای بررسی این نوع جریان ها استفاده شده است. برای مثال ولیانی و کالیفی با استفاده از روش عددی حجم محدود HLL جریان فوق بحرانی در خم را مدل سازی نمودند [۷].

در این مقاله جریان فوق بحرانی در خم با استفاده از روش عددی حجم محدود Roe-TVD شبیه سازی شده و با داده های آزمایشگاهی رینر-هاگر [۴] و فرمول های تحلیلی کارمن و ناپ-ایین مقایسه می شود، آنگاه درستی فرضیات حل های تحلیلی بر اساس نتایج مستقل بدست آمده از روش عددی گفته شده ارزیابی خواهند شد.

۲- حل تحلیلی جریان فوق بحرانی در خمها

در شکل (۱)، امواج فوق بحرانی مثبت و منفی در یک خم رسم شده است. اولین فراز موج در دیواره خارجی با زاویه θ_{max} از ورودی خم و اولین نشیب آن در دیواره داخلی با زاویه θ_{min} تولید می شود. در محاسبات نظری فرض بر آن است که $\theta_{max} = \theta_{min} = \theta_m$ باشد. موقعیت فراز و نشیب این امواج از هندسه کانال و مشخصات جریان بدست می آید، و بر این اساس داریم [۲]:

$$\theta_m = \tan^{-1} \frac{2b}{(2r_c + b) \tan \beta} \quad (1)$$

که در آن b عرض کانال خمیده، r_c شعاع مرکزی خم و زاویه β بر حسب عدد فرود ورودی کانال (Fr_0) تعریف می شود.

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{1}{Fr_0} \right) ; \quad Fr_0 = \frac{V_0}{\sqrt{gh_0}} \quad (2)$$

در (۲) عوامل h_0 و V_0 به ترتیب عمق و سرعت آب در ورودی خم و g شتاب جاذبه است. در محاسبات تحلیلی فرض می شود

دیفرانسیلی معادلات آب‌های کم عمق در دو بعد برای کانال افقی با چشم پوشی کردن از اثرات اصطکاکی به صورت رابطه (۵) نوشته می‌شود [۱۰]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

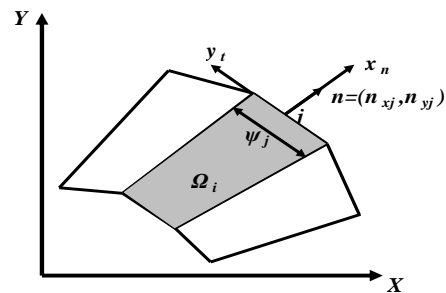
U بردار متغیرهای بقاء و F و G بردار شار در راستای محور x (y) هستند و بصورت رابطه (۶) تعریف می‌شوند:

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}; F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}; G(U) = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

h ارتفاع سطح آب در هر نقطه، g شتاب ثقل و u (v) مؤلفه سرعت متوسط‌گیری شده در عمق در راستای x (y) است.

۴- الگوی دو بعدی روش عددی Roe-TVD

با استفاده از روش عددی حجم محدود می‌توان مشخصات دو بعدی جریان فوق بحرانی در خم را بدون پیش فرض خاصی محاسبه نمود. با توجه به شکل (۲)، سیستم (۵) بر هر کدام از سلول‌های چهارگوش به صورت رابطه (۷) جداسازی می‌شود [۱۱]، [۱۲].



شکل (۲): سیستم مختصات اصلی و محلی برای محاسبه شار دو بعدی

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Omega_i} \sum_{j=1}^{nb} ((F, G)_j^*(n_{x,j}, n_{y,j})) \cdot \psi_j + S_i^n \Delta t \quad (7)$$

Ω_i مساحت سلول، ψ_j طول وجه زام آن، $(n_{x,j}, n_{y,j})$ مؤلفه‌های بردار نرمال خارجی به وجه j ، Δt گام زمانی، بالانویس n شماره گام زمانی و nb تعداد جوه سلول است. (در این مقاله به علت این که از سلول‌های چهارگوش استفاده شده است، مقدار $nb=4$ می‌شود).

مقادیر شار عددی در رابطه (۷) با استفاده از روش Roe به روش زیر محاسبه می‌شود (زیر نویس l مربوط به سلول i و زیرنویس r مربوط به سلول مجاور است):

$$(F, G)_j^*(n_{x,j}, n_{y,j}) = \frac{1}{2} (F(U_r) \cdot n_x + G(U_r) \cdot n_y + F(U_l) \cdot n_x + G(U_l) \cdot n_y) - \frac{1}{2} |\tilde{A}| (U_r - U_l) \quad (8)$$

که در آن:

$$\tilde{A} = R |\tilde{\Lambda}| R^{-1} \quad (9)$$

R ماتریس بردارهای ویژه راست است:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -n_y & \tilde{u} + \tilde{c}n_x & \tilde{u} - \tilde{c}n_x \\ n_x & \tilde{v} + \tilde{c}n_y & \tilde{v} - \tilde{c}n_y \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$R^{-1} = \frac{1}{2\tilde{c}} \begin{bmatrix} 2\tilde{c}(\tilde{u}n_y - \tilde{v}n_x) & -2\tilde{c}n_y & 2\tilde{c}n_x \\ \tilde{c} - \tilde{u}n_x - \tilde{v}n_y & n_x & n_y \\ \tilde{c} + \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y & -n_x & -n_y \end{bmatrix} \quad (11)$$

در رابطه (۹)، $\tilde{\Lambda}$ ماتریس متوسط مقادیر ویژه است:

$$|\tilde{\Lambda}| = \begin{pmatrix} |\tilde{\lambda}_1| & 0 & 0 \\ 0 & |\tilde{\lambda}_2| & 0 \\ 0 & 0 & |\tilde{\lambda}_3| \end{pmatrix} \quad (12)$$

که در آن:

$$\tilde{\lambda}_1 = n_x \tilde{u} + n_y \tilde{v}, \quad \tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}_1 + \tilde{c}, \quad \tilde{\lambda}_3 = \tilde{\lambda}_1 - \tilde{c} \quad (13)$$

مقادیر متوسط \tilde{u} و \tilde{c} و \tilde{h} در روش Roe به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tilde{h} = \sqrt{h_l h_r} \quad \tilde{c} = \sqrt{g \frac{h_l + h_r}{2}} \quad (14)$$

$$\tilde{v} = \frac{v_l \sqrt{h_l} + v_r \sqrt{h_r}}{\sqrt{h_l} + \sqrt{h_r}} \quad \tilde{u} = \frac{u_l \sqrt{h_l} + u_r \sqrt{h_r}}{\sqrt{h_l} + \sqrt{h_r}}$$

متغیرهای با اندیس l و r بر مرز سلول و در سمت چپ و راست آن تعریف شده‌اند. برای رسیدن به دقت مرتبه دو، متغیرهای اولیه در هر سلول به صورت تابعی خطی نوشته می‌شوند. همچنین برای کنترل نوسانات از محدودکننده شیب مین مود استفاده می‌شود. بنابراین در هر راستای s مقادیر U عبارت است از [۱۳]:

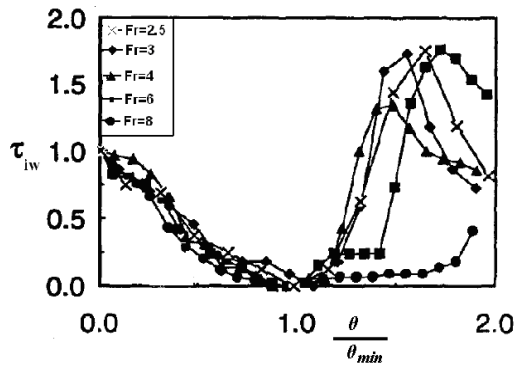
$$U_n(s, t_n) = \tilde{U}_i^n + \sigma_i^n (s - s_i)$$

$$s_i = s_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \Delta s \quad s_{i-\frac{1}{2}} < s < s_{i+\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_i^n = \min\text{mod}\left(\frac{\tilde{U}_i^n - \tilde{U}_{i-1}^n}{\Delta s}, \frac{\tilde{U}_{i+1}^n - \tilde{U}_i^n}{\Delta s}\right); \quad (15)$$

$$\min\text{mod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{if } |a| < |b| \text{ and } ab > 0 \\ b & \text{if } |b| < |a| \text{ and } ab > 0 \\ 0 & \text{if } ab \leq 0 \end{cases}$$

\tilde{U}_i^n مقدار متوسط بردار متغیرهای بقا است که در هر گام از حل عددی به دست می‌آید. برای جلوگیری از ناپایداری عددی، لازم است شرط کورانت-فردریخ-لوی (CFL)، در تمام سلول‌ها برقرار باشد:



شکل (ب) دیوار داخلی

شکل (۳): نتایج آزمایشگاهی رینر و هاگر [۴]

h ارتفاع آب در هر زاویه انحراف، h_{max} و h_{min} به ترتیب ارتفاع‌های بیشینه و کمینه و h_0 ارتفاع آب در کانال بالادست است. همچنین θ_{max} (θ_{min}) محل تشکیل اولین فراز (نشیب) در دیوار خارجی (داخلی) است. رینر و هاگر بر اساس مشاهدات آزمایشگاهی روابطی برای محاسبه θ_{min} و θ_{max} ارائه داده‌اند.

$$\tan \theta_{max} = \begin{cases} Fr_0 \frac{b}{r_m} & Fr_0 \frac{b}{r_m} \leq 0.35 \\ 0.6 \sqrt{Fr_0 \frac{b}{r_m}} & Fr_0 \frac{b}{r_m} > 0.35 \end{cases} \quad (۱۹)$$

$$\tan \theta_{min} = \sqrt{2} Fr_0 \frac{b}{r_m} \quad (۲۰)$$

رینر و هاگر بر اساس نتایج آزمایشگاهی، روابطی ارائه نمودند که به وسیله آن‌ها می‌توان سطح آب را در دیوارهای خارجی و داخلی در محدوده اولین موج به دست آورد.

$$\tau_{ow} = \sin^{1.5} \left[\left(\frac{\pi}{2} \frac{\theta}{\theta_{max}} \right) \right], \quad 0 \leq \theta / \theta_{max} < 1.25 \quad (۲۱)$$

$$\tau_{iw} = 1 - \sin^{1.5} \left[\left(\frac{\pi}{2} \frac{\theta}{\theta_{min}} \right) \right], \quad 0 \leq \theta / \theta_{min} < 1.2 \quad (۲۲)$$

طبق شکل (۳)، رابطه (۲۱) پاسخ مناسبی در محدوده $0.75 < \theta / \theta_{max} \leq 1.25$ بدست می‌دهد و از آنجا که بزرگ‌ترین اعماق در این محدوده وجود دارند، از نظر مهندسی نیز مورد علاقه است.

برای نیمرخ سطح آب در دیوار خارجی رابطه دیگری نیز ارائه شده است:

$$\tau_{ow} = \frac{1 - j_0 \left(3.8 \frac{\theta}{\theta_{max}} \right)}{1.4} \quad (۲۳)$$

که در آن j_0 تابع بسمل مرتبه صفر است. رابطه (۲۳) در محدوده $0.75 < \theta / \theta_{max} \leq 1.25$ جواب‌های نزدیکی به معادله (۲۱) می‌دهد و در محدوده $1.25 < \theta / \theta_{max} \leq 2$ نیز پاسخ مناسبی دارد [۴]، [۶].

$$N_{CFL} = \frac{|V_i| + \sqrt{gh_i}}{(\Omega_i / P_i) / \Delta t} \leq 1 \quad (۱۶)$$

V_i مقدار سرعت برآیند و P_i محیط سلول i است.

در این تحقیق، رژیم جریان در خم‌ها فوق بحرانی بوده بنابراین شرایط مرزی مورد نیاز مانند عمق و سرعت با استفاده از اطلاعات کانال بالادست در ورودی خم اعمال شده است. برای مدل‌سازی دیوارهای کانال از شرط مرزی لغزشی استفاده شد. معادلات غیردائمی آبهای کم عمق تا رسیدن به حالت پایدار تحلیل شدند و زمانی که اختلاف مجموع اعماق کلیه سلول‌ها در دو گام متوالی کمتر از 10^{-7} شد، پاسخ‌ها به عنوان حل دائمی در نظر گرفته شدند.

۵- مطالعات آزمایشگاهی جریان فوق بحرانی در

کانال‌های خمیده

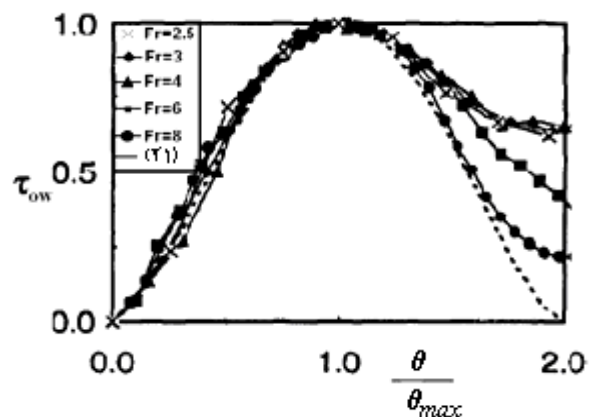
رینر و هاگر در سال ۱۹۹۷ جریان فوق بحرانی در کانال‌های خمیده با مقطع مستطیلی را به طور آزمایشگاهی مطالعه نمودند. مشخصات هندسی یکی از کانال‌های آنها به شرح زیر بوده است [۴]:

زاویه خم = 51° عرض کانال = 0.25 m
شیب کانال = 0° شعاع مرکزی = 3.607 m

نتایج آزمایش‌های رینر و هاگر برای دیوارهای داخلی و خارجی به ازای اعداد فرود ورودی مختلف در شکل (۲-الف) و (۳-ب) نشان داده شده است. در این شکل‌ها τ_{iw} و τ_{ow} به ترتیب اعماق بی‌بعد شده در دیوارهای خارجی و داخلی هستند و طبق روابط (۱۷) و (۱۸) تعریف می‌شوند:

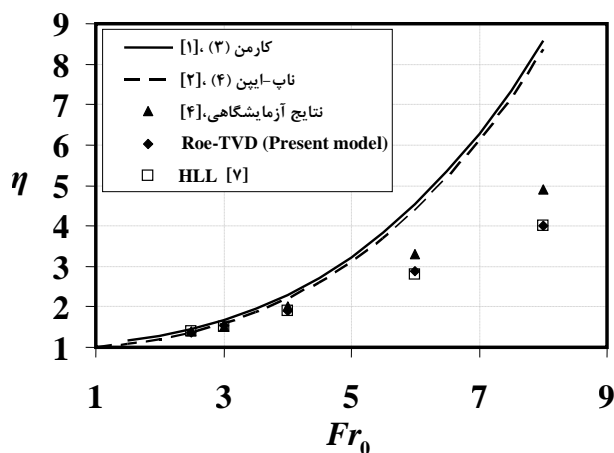
$$\tau_{ow} = \frac{h - h_0}{h_{max} - h_0} \quad (۱۷)$$

$$\tau_{iw} = 1 - \frac{h - h_0}{h_{min} - h_0} \quad (۱۸)$$



شکل (الف) دیوار خارجی

۶- مقایسه روابط تحلیلی و مطالعات آزمایشگاهی با روش‌های عددی برای کانال خمیده رینر-هاگر

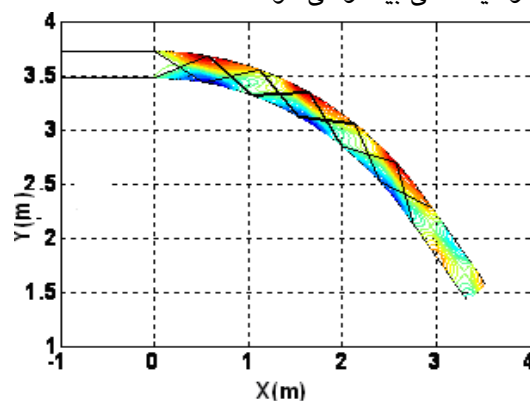


شکل (۵): مقایسه نتایج عددی با روابط تحلیلی و آزمایشگاهی

در نمودارهای شکل (۶-الف) و (۶-ب) مقادیر اعماق بدون بعد τ_{iw} و τ_{ow} در مقابل θ/θ_{max} و θ/θ_{min} با استفاده از روش عددی Roe-TVD به ازای اعداد فرود مختلف با روابط تجربی (۲۱)، (۲۲) و (۲۳) به دست آمده از آزمایش‌های رینر و هاگر برای دیوارهای خارجی و داخلی در محدوده اولین موج نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود حداکثر اختلاف جواب‌های عددی و آزمایشگاهی به ازای اعداد فرود کمتر از ۴ درصد در محدوده $\theta/\theta_m < 1$ برای τ_{iw} و τ_{ow} کمتر از ۱۲ درصد است.

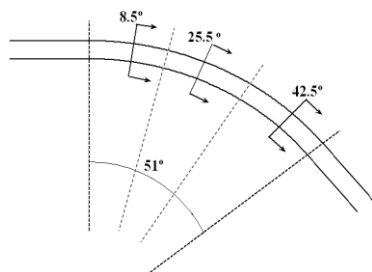
در شکل (۷) نیمرخ طولی جریان در دیوارهای داخلی و خارجی بر اساس نتایج عددی و پیش‌بینی‌های ناپ و ایپن به ازای عدد فرود ۲/۵ نشان داده شده است. در دیوار خارجی، منحنی اولین موج از ابتدا تا فراز موج در مدل عددی، بر مقادیر تحلیلی منطبق است. در دیوار داخلی نیز منحنی اولین موج عددی، از ابتدا تا نشیب، به موج تحلیلی بسیار نزدیک است اما برخلاف فرضیات حل تحلیلی، فراز موج عددی در دیوار خارجی روبروی نشیب آن در دیوار داخلی واقع نشده است. در ادامه، امواج عددی در دیوارهای داخلی و خارجی به طور طبیعی پخش می‌شوند اما امواج تحلیلی، طبق فرض، به طور دقیق تکرار می‌شوند. بدیهی است که این فرض چندان معقول به نظر نمی‌رسد. بنابراین بررسی محدوده درستی سایر مفروضات حل تحلیلی لازم است.

ولیانی و کالفی، کانال خمیده رینر و هاگر را با استفاده از روش حجم محدود HLL مدل‌سازی نموده‌اند [۷]. در این تحقیق نیز کانال خمیده رینر و هاگر به کمک روش حجم محدود Roe-TVD مدل شد. در شکل (۴) موقعیت کلی امواج مورب دو بعدی در پلان، بدست آمده از مدل عددی Roe-TVD با روش تحلیلی ناپ-ایپن، به ازای عدد فرود ۲/۵ مقایسه شده است. منحنی‌های تراز، مربوط به روش عددی هستند و خطوط توپر، موقعیت امواج مورب را از رابطه (۱) مشخص می‌نمایند. در مجموع سه موج کامل در فاصله زوایای ۰ تا ۱۷ درجه و ۱۷ تا ۳۴ درجه و ۳۴ تا ۵۱ درجه در دیوارهای داخلی و خارجی تشکیل شده است. فراز این امواج در دیوار خارجی به طور تقریبی در زوایای ۸/۵ و ۲۵/۵ و ۴۲/۵ درجه واقع شده است. در شکل (۵)، η نسبت عمق اولین فراز موج به عمق اولیه جریان ورودی در کانال بالادست ($\eta = h_{max}/h_0$) برای روش عددی Roe-TVD، روش عددی HLL ولیانی و کالفی، روابط تحلیلی کارمن و ناپ-ایپن به همراه نتایج آزمایشگاهی رینر و هاگر به ازای عددهای فرود ۲/۵، ۳، ۴، ۶ و ۸ رسم شده است. عمق جریان در کانال بالادست در تمام حالات برابر با ۵ cm است. همان‌طور که در این شکل دیده می‌شود، پاسخ روش‌های عددی HLL و Roe-TVD، بریکدیگر منطبق است و پاسخ مدل‌های تحلیلی کارمن و ناپ - ایپن بسیار نزدیک به یکدیگر هستند. در اعداد فرود کمتر از ۴، جواب‌های عددی و روابط تحلیلی به نتایج آزمایشگاهی نزدیک است در حالی‌که با افزایش عدد فرود، فاصله جواب‌های عددی و به خصوص حل تحلیلی از نتایج آزمایشگاهی بیشتر می‌شود.

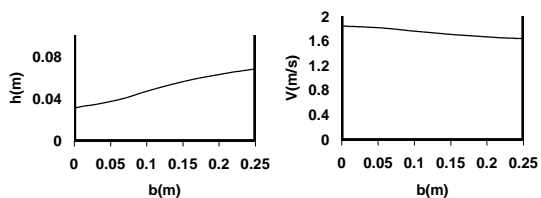


شکل (۴): موقعیت امواج بر اساس حل عددی و رابطه ناپ و ایپن برای خم رینر و هاگر در عدد فرود ۲/۵

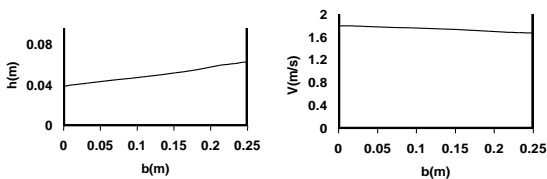
مطابق شکل (۴) و (۷) این مقاطع به طور تقریب در موقعیت فراز امواج دیوار خارجی واقع شده‌اند. در شکل (۸) موقعیت مقاطع نشان داده شده است. در شکل (۹-الف) تا (۹-ج) عمق و سرعت جریان در این مقاطع، به ازای عدد فرود ورودی ۲/۵ رسم شده است. با توجه به شکل تغییرات عمق جریان در هر مقطع تقریباً خطی و نسبت به محور مرکزی کانال، متقارن معکوس است. به همین دلیل در صورتیکه ارتفاع آب در خط مرکز کانال ثابت باشد، سطح مقطع جریان در طول خم ثابت می‌ماند. بنابراین با توجه به ثابت بودن دبی جریان، فرض ثابت بودن سرعت متوسط مقطع در طول خم منطقی می‌شود. در شکل (۱۰) نیمرخ که هر چند عمق جریان متغیر و سینوسی شکل است اما با تغییراتی کمتر از $\pm 5\%$ درصد، به طور متوسط برابر با عمق جریان ورودی به خم (۵ cm) است.



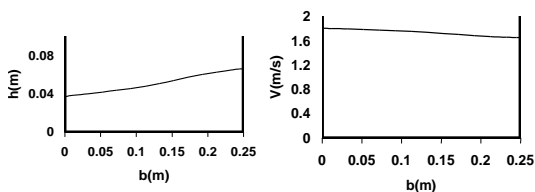
شکل (۸): موقعیت مقاطع در خم رینر و هاگر



(الف) مقطع زاویه 8.5°

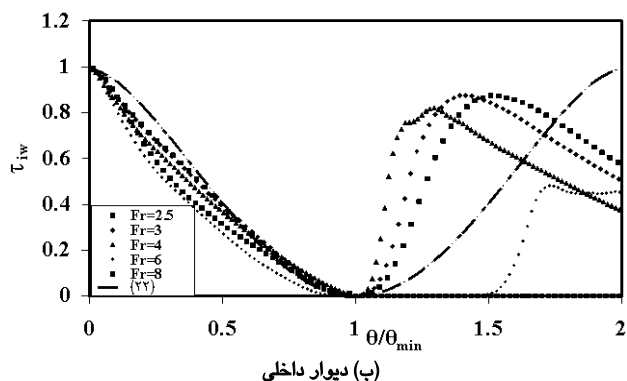
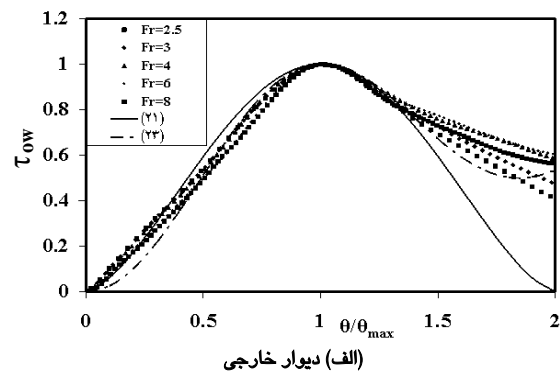


(ب) مقطع زاویه 25.5°

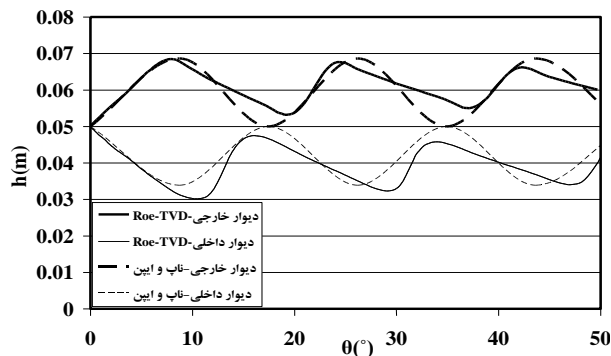


(ج) مقطع زاویه 42.5°

شکل (۹): نیمرخ سطح آب و سرعت برای مقاطع مختلف، به ازای عدد فرود ورودی ۲/۵



شکل (۶): مقایسه نتایج عددی و روابط تجربی رینر و هاگر



شکل (۷): مقایسه نیمرخ جریان در دیوارهای داخلی و خارجی

۷- ارزیابی فرضیات حل تحلیلی با استفاده از روش های عددی

همان‌طور که در ذکر شد، کارمن و ناپ-ابین با اعمال فرضیاتی توانستند حل تحلیلی جریان را در کانال های خمیده به دست آورند. فرض اول مربوط به ماهیت جریان و هندسه کانال بود و قابل مناقشه نیست. در ادامه مقاله درستی فرض های بعدی به طور مستقل با استفاده از حل معادلات آب های کم عمق به کمک روش های عددی بررسی می‌شوند.

۷-۱- فرض ثابت بودن سرعت متوسط در طول کانال

برای تحقیق در مورد فرض فوق، خم 51° به سه قسمت تقسیم شد و در میانه هر قسمت سه مقطع در زوایای 8.5° ، 25.5° و 42.5° از ابتدای خم در نظر گرفته شدند،

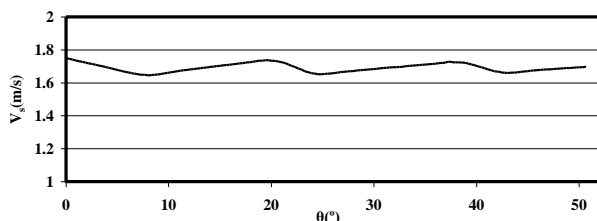
ازای $Fr_0 < 4/2$ در حدود یک درصد است بنابراین فرض ثابت بودن انرژی مخصوص در طول خم نیز حداقل در این محدوده جریان، مناسب به نظر می‌رسد. در جریان های با $Fr_0 > 4/2$ همان‌طور که گفته شد خشک شدگی جریان در دیواره داخلی خم، فرض جریان در کانال مستطیلی را بهم می‌زند.

جدول (۲): انرژی مخصوص (m) مقاطع مختلف

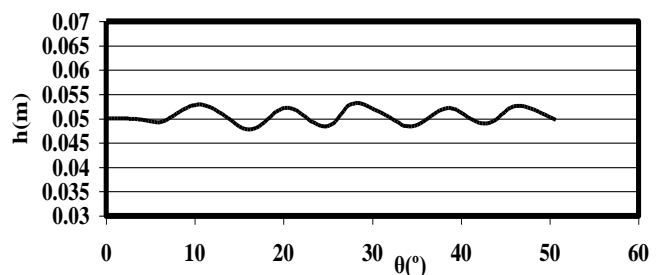
مقطع Fr_0	$\theta=0^\circ$	$\theta=1/5^\circ$	$\theta=25/5^\circ$	$\theta=42/5^\circ$	$P_E(\%)$
2/5	0.2062	0.2061	0.2059	0.2056	-0.29
3	0.275	0.2746	0.2742	0.2738	-0.42
4	0.45	0.4493	0.4461	0.4452	1/0.6
4/1	0.4702	0.4609	0.4659	0.4652	1/0.2
4/2	0.4910	0.4907	0.4854	0.4855	1/12
4/3	0.5122	0.5118	0.4912	0.5055	4/11
4/5	0.5562	0.5558	1/5160	0.5471	7/5
4/7	0.6022	0.6017	0.5485	0.5905	8/92
5	0.6750	0.6744	1/590	0.6596	11/69
5/3	0.7260	0.7252	0.6320	0.7072	12/81
5/5	0.806	0.8052	1/6862	0.7818	14/86
6	0.95	0.948	1/8572	0.9222	9/76
8	1/65	1/6457	1/4551	1/5658	11/81

۳-۷- بررسی ثابت بودن سرعت در دیوار خارجی

مطالعات آزمایشگاهی ناپ- اپین نشان داد که سرعت در طول دیوار خارجی ثابت است. در شکل (۱۱) نیمرخ سرعت مماسی در دیوار خارجی (V_t) بر اساس نتایج حل عددی Roe-TVD برای عدد فرود 2/5 رسم شده است. در جدول (۳) سرعت مماسی و حداکثر تغییرات نسبی آن در دیوار خارجی به ازای اعداد فرود مختلف آورده شده است. در جدول (۳)، P_{Vt} حداکثر درصد نسبت تغییرات سرعت مماسی است. همان‌طور که دیده می‌شود حداکثر تغییرات نسبی سرعت کمتر از حدود ۴ درصد است. با توجه به این نکته و با در نظر گرفتن شکل (۱۱)، فرض ثابت بودن سرعت مماسی در دیوار خارجی تا حدودی مناسب به نظر می‌رسد.



شکل (۱۱): نیمرخ سرعت مماسی در دیوار خارجی بر اساس حل عددی Roe-TVD برای عدد فرود 2/5



شکل (۱۰): نیمرخ سطح آب در خط مرکزی کانال برای عدد فرود ورودی 2/5

جدول (۱): سرعت‌های متوسط عددی در مقاطع مختلف (m/s)

مقطع Fr_0	$\theta=0^\circ$	$\theta=1/5^\circ$	$\theta=25/5^\circ$	$\theta=42/5^\circ$	$P_v(\%)$
2/5	1/750.5	1/7456	1/7459	1/7424	0.46
3	2/100.6	2/094	2/0959	2/0919	0.42
4	2/800.9	2/7937	2/7842	2/778	0.82
4/1	2/870.8	2/8645	2/8541	2/8478	1/00
4/2	2/940.9	2/9346	2/9210	2/9169	0.81
4/3	2/100.9	2/0045	2/9351	2/9842	2/52
4/5	2/1510	2/1445	2/990.1	2/1195	5/11
4/7	2/2910	2/2845	2/0522	2/2522	7/26
5	2/5010	2/4944	2/1628	2/4529	9/66
5/3	2/6412	2/6344	2/2572	2/5860	10/54
5/5	2/8512	2/8442	2/2726	2/7842	12/42
6	4/2012	4/1926	2/8299	4/1227	8/84
8	5/6017	5/5899	5/0642	5/4455	9/59

در جدول (۱) سرعت‌های متوسط در سه مقطع و به ازای اعداد فرود ورودی مختلف به خم ارائه شده است. در این جدول، P_v حداکثر درصد نسبت تغییرات سرعت متوسط در هر مقطع θ به سرعت کانال بالادست ($\theta=0^\circ$) است. دیده می‌شود که ملاحظه می‌شود حداکثر تغییرات سرعت متوسط به ازای $Fr_0 < 4/2$ یک درصد کمتر است، بنابراین فرض ثابت بودن سرعت متوسط در طول خم حداقل در این محدوده جریان فرض مناسبی به نظر می‌رسد، در صورتی که $Fr_0 > 4/2$ باشد، جریان در بعضی قسمت‌های دیوار داخلی خم خشک می‌شود و فرض مقطع مستطیلی کانال بهم می‌خورد.

۲-۷- فرض جریان بدون اصطکاک

در صورتیکه از اصطکاک در طول خم افقی چشم‌پوشی شود انرژی مخصوص $(E = h + v^2/2g)$ در تمام مقاطع ثابت می‌ماند. در جدول (۲) مقدار انرژی مخصوص در سه مقطع به ازای اعداد فرود ورودی مختلف داده شده است. در این جدول P_E حداکثر درصد نسبت تغییرات انرژی مخصوص در طول خم به انرژی مخصوص کانال بالادست در اعداد فرود مختلف است. طبق این جدول حداکثر تغییرات انرژی مخصوص به

۸- نتیجه

جریان فوق بحرانی در کانال خمیده رینر و هاگر با مقطع مستطیلی با استفاده از روش عددی Roe-TVD مدل‌سازی شد و با جوابهای تحلیلی و نتایج آزمایشگاهی و همچنین جوابهای به دست آمده از روش عددی HLL مقایسه گردید. در ادامه درستی فرضیات روشهای تحلیلی به کمک شبیه‌سازی عددی ارزیابی شد و مشخص شد که برخلاف فرضیات حل تحلیلی ناپ-ایین، امواج فوق بحرانی در مسیر خود در خم پخش می‌شوند. دو فرض ثابت بودن سرعت متوسط مقطع در طول خم و بدون اصطکاک بودن جریان یا ثابت بودن انرژی مخصوص به ازای $Fr_0 < 4/2$ با خطای حدود یک درصد قابل قبول هستند. همچنین سرعت در دیواره خارجی را در همان محدوده اعداد فرود با خطای حداکثر چهار درصد می‌توان ثابت فرض نمود. با افزایش عدد فرود ورودی، جریان در دیواره خم داخلی خشک می‌شود و از دقت فرضیات فوق کاسته می‌شود.

جدول (۳): سرعت مماسی در دیوار خارجی در مقاطع مختلف

مقطع Fr_0	$\theta=0^\circ$	$\theta=8/5^\circ$	$\theta=25/5^\circ$	$\theta=42/5^\circ$	$P_{v1}(\%)$
۲/۵	۱/۷۴۸۹	۱/۸۴۷۹	۱/۸۰۱۲	۱/۸۰۷۱	۲/۵۲۴
۳	۲/۰۹۸۷	۱/۹۸۱۷	۲/۰۶۴۴	۲/۰۴۴۴	۴/۰۰۴
۴	۲/۷۹۹	۲/۶۷۳۸	۲/۷۰۲۸	۲/۶۶۱۶	۱/۵۲۳۲
۴/۱	۲/۸۶۹۹	۲/۷۴۴۵	۲/۷۶۸۴	۲/۷۳۴۴	۱/۲۲۸۹
۴/۲	۲/۹۴۰۰	۲/۸۱۴۶	۲/۸۳۳۷	۲/۸۱۵۲	-/۶۷۳۱
۴/۳	۳/۰۰۹۹	۲/۸۸۴۳	۲/۸۸۹۴	۲/۸۹۹۸	-/۵۳۴۹
۴/۵	۳/۱۵۰۱	۳/۰۲۴۹	۳/۰۳۲۰	۳/۰۶۹۵	۱/۴۵۲۷
۴/۷	۳/۲۹۰۱	۳/۱۶۵۰	۳/۱۶۴۹	۳/۲۱۴۰	۱/۵۲۶۹
۵	۳/۵۰۰۱	۳/۳۷۵۳	۳/۳۶۴۰	۳/۴۱۵۱	۱/۴۹۶۰
۵/۳	۳/۶۴۰۳	۳/۵۱۵۵	۳/۴۹۷۰	۳/۵۴۶۹	۱/۴۰۷۳
۵/۵	۳/۸۵۱۲	۳/۷۲۵۸	۳/۶۹۷۴	۳/۷۴۸۳	۴/۱۵۸۴
۶	۴/۱۹۹۳	۴/۰۷۴۱	۴/۰۳۲۵	۴/۰۸۶۹	۱/۳۳۱۰
۸	۴/۵۹۹۴	۵/۴۶۷۷	۵/۳۹۵۳	۵/۴۵۹۲	۱/۳۲۲۷

۹- مراجع

- Chow, V. T.; Open Channel Hydraulics, McGraw-Hill Intern, 680p, 1986. [۸]
- Knapp, R. T.; "Design Of Channel Curves For Supercritical Flow" 2nd paper in High-velocity flow in open channels: A symposium, Transactions, ASCE, Vol. 116, pp. 296-325, 1951. [۹]
- Toro, E.; Shock Capturing Methods For Free Surface Shallow Flows, John Wiley, ChiChester, New York, 308p, 2001. [۱۰]
- Brufau1, P. and Garcia-Navarro, P.; "Two-Dimensional Dam Break Flow Simulation" Int. J. Numer. Meth. Fluids, Vol. 33, pp. 35-57, 2000. [۱۱]
- Gomez, L.; "An Unstructured Finite Volume Model For Unsteady Turbulent Shallow Water Flow With Wet-dry Fronts Numerical Solver And Experimental Validation" thesis doctoral, Universidad de a Coruna, 248p, 2005. [۱۲]
- Leveque, R. J.; Finite Volume Methods For Hyperbolic Systems, Cambridge University press, New York, 558p, 2002. [۱۳]
- Karman, V.; "Eine Praktische Anwendung Der Analogie Zwischen Ueberschall-Strömung In Offenen Gerinnen" ZAMM, Vol. 18, pp. 49-56, 1938. [۱]
- Knapp R.T. and Ippen A.T.; " Curvilinear flow of liquids with free surfaces at velocities above that of wave propagation" Proc. 5th Int. Congr. of Appl. Mech., Cambridge University Press, NewYork, pp.531-536, 1938. [۲]
- Ghaeini Hessaroeyeh, M. and Tahershamsi, A.; " Analytical model of supercritical flow in rectangular chute bends" J. Hydr. Res., Vol. 47, No. 5, pp. 566-573, 2009. [۳]
- Reinauer, R. and Hager, H.; "Supercritical Bend Flow" J. Hydr. Engng., Vol. 123(3), pp. 208-218, 1997. [۴]
- Poggi, B.; "Correnti veloci nei canali in curva" L'Energia elettrica, Vol. 33, pp.465-480,1956. (Italian) [۵]
- Beltrami, G.M., Repetto, R. and Del guzzo, A.; "A Simple Method To Regularize Supercritical Flow Profiles In Bends" J. Hydr. Res., Vol. 45, No. 6, pp.773-786, 2007. [۶]
- Valiani, A. and Caleffi, V.; "Brief Analysis Of Shallow Water Equations Suitability To Numerically Simulate Supercritical Flow In Sharp Bends" J. Hydr. Engng., Vol. 131, No. 10, pp. 912-916, 2001. [۷]

۱۰- زیر نویس ها

- ^۱. slip boundary condition
^۲. Bessel function of zero order