نشریه مهندسی عمران امیرکبیر

نشریه مهندسی عمران امیرکبیر، دوره ۵۰، شماره ۵، سال ۱۳۹۷، صفحات ۸۵۵ تا ۸۶۴
DOI: 10.22060/ceej.2017.12713.5255

مودهای شکست ترک حلقوی در محیط ایزوتروپ جانبی

سید مرتضی دهقان منشادی[۱]، شهریار ناطق[۱]، علی خجسته[۲*]، محمد رحیمیان[۱]

[۱] دانشکده عمران، دانشگاه تهران، تهران، ایران
[۲] دانشکده علوم مهندسی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۵ فروردین ۱۳۹۶
بازنگری: ۱۹ اردیبهشت ۱۳۹۶
پذیرش: ۲۱ خرداد ۱۳۹۶
ارائه آنلاین: ۲۳ خرداد ۱۳۹۶

کلمات کلیدی:
ایزوتروپ جانبی
ترک حلقوی
ضریب شدت تنش
معادله فردهلم
مود شکست

چکیده: ایجاد و گسترش ترک در جامدات یکی از عوامل مهم کاهش مقاومت سازه‌ها میباشد، بنابراین چگونگی رفتار ترک در محیط‌های مختلف از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد. از آن جا که ترک میتواند در معرض مودهای مختلف شکست قرار گیرد، بررسی ترک تحت بارگذاری‌های مختلف کمک شایانی به پیشبینی رفتار محیط‌های دارای ترک میکند. این پژوهش حل تحلیلی اندرکنش ترک حلقوی مسطح با محیط بینهایت ایزوتروپ جانبی به گونه‌ای که ترک در معرض مودهای مختلف شکست (بازشدگی، برشی و پارگی) میباشد را مورد مطالعه قرار داده است. در هر مود با نوشتن شرایط مرزی حاکم بر مساله و جایگذاری آن‌ها در معادلات حاکم بر محیط، شرایط مرزی به معادلات انتگرالی سه‌گانه تبدیل می‌گردند. در ادامه با استفاده از تبدیل‌های هنکل و ابل، معادلات انتگرالی سه‌گانه به معادلات فردهلم نوع دوم کاهش پیدا میکنند که به علت پیچیدگی دارای جواب تحلیلی نمی‌باشند. در نتیجه معادلات با به کارگیری روش عددی مناسب حل گردیدند و ضرایب شدت تنش نوک داخلی و خارجی ترک بر حسب نوع بارگذاری (خطی و یکنواخت) و نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ترک حلقوی با دقت مناسب به دست آورده شدند. همچنین ضرایب شدت تنش برای حالت‌های خاص ترک سکه‌ای شکل و ترک خارجی به صورت تحلیلی محاسبه گردیدند که همخوانی نتایج با مطالعه‌های پیشین صحت روش حل را نشان میدهد. نتایج به دست آمده گویای آن است که ضرایب شدت تنش در هر سه مود شکست مستقل از خواص ماده تشکیل دهنده محیط می‌باشند به گونه‌ای که این ضرایب فقط با تغییر در بارگذاری وارد بر محیط تغییر می‌کنند. همچنین جهت رشد ترک حلقوی نیز وابسته به نوع بارگذاری می‌باشد.

۱- مقدمه

وجود عیب و نقص همچون ترک در محیط‌های مختلف امری معمول میباشد. همانطور که واضح است، وجود ترک و حفره موجب کاهش مقاومت و طول عمر سازه‌ها میگردد. بررسی اثرات بارگذاری‌های مختلف در محیط‌های دارای ترک، کاربردهای عملی قابل توجهی در شاخه مکانیک خاک دارد. در واقع تعیین وضعیت تنش در اطراف نوک ترک در حالت استاتیکی یکی از عوامل مهم در تعیین مقاومت شکست اعضای سازهای و چگونگی گسترش ترک در محیط‌های پیوسته میباشد. ترک‌ها اغلب در بین سطوح لایه‌ها و یا در محیط‌های همگن بعد از فرآیند ساخت به وجود می‌آیند [۱]. از سویی دیگر، مواد کامپوزیتی که در سالهای اخیر در زمینه علوم و مهندسی کاربرد گسترده‌ای یافته‌اند دارای خاصیت ناهمسانی میباشند. یکی از محیط‌های ناهمسان رایج محیط ایزوتروپ جانبی میباشد که بر خلاف محیط ایزوتروپ که دارای خواص یکسان در همه جهت‌های محیط میباشد، خواص این محیط نسبت به یک محور تقارن یکسان است به عبارت دیگر تنها یک صفحه ایزوتروپی دارد. بنابراین بررسی وجود ترک در محیط ایزوتروپ جانبی اهمیت دوچندانی پیدا میکند. همچنین، دیدگاه تحلیلی و ریاضی به فهم فیزیکی و عمیق اینگونه مسائل کمک شایانی مینماید.

بررسی اندرکنش ترک حلقوی و محیط اطراف آن به عنوان حالت کلی که در بردارنده حالت‌های ترک سکه‌ای و خارجی میباشد نیز دارای اهمیت میباشد.

اردوگان[۱] [۲] مساله دو محیط نیمه بینهایت الاستیک چسبیده به هم با خواص متفاوت به طوری که صفحه اتصال دو محیط به وسیله ترک ضعیف گردیده است را مورد بررسی قرار داد. مساله محیط بینهایت حاوی ترک حلقوی در معرض کشش با استفاده از یک روش تقریبی توسط اسمتانین[۲] [۳] حل گردید. در این مطالعه، نتایج ضرایب شدت تنش ترک تنها برای ترک با طول‌های بزرگ از دقت مناسبی برخوردار میباشند (همچنین [۶-۴] را ببینید). ضرایب شدت تنش ترک حلقوی تحت بارگذاری‌های پیچشی خطی و کششی یکنواخت در محیط ایزوتروپ بینهایت، با استفاده از قضیه تقابل بتی، توسط چویی[۳] و شیلد[۴] [۷] محاسبه گردیدند. سلوادرای[۵] و سینگ[۶] [۸] مساله اندرکنش ترک حلقوی مسطح تحت تنش قائم با محیط ایزوتروپ بینهایت را مطالعه نمودند. معادلات انتگرالی حاکم بر مساله با استفاده از بسط سری توانی حل گردیدند و ضرایب شدت تنش ترک بر حسب نسبت

*نویسنده عهده‌دار مکاتبات: akhojasteh@ut.ac.ir

1 Erdogan
2 Smetanin
3 Choi
4 Shield
5 Selvadurai
6 Singh

شعاع داخلی به شعاع خارجی ترک به صورت تقریبی مورد ارزیابی قرار گرفتند. به طوری که نتایج برای نسبت‌های شعاع داخلی به شعاع خارجی ترک بزرگتر از ۰/۵ از دقت مناسبی برخودار نمی‌باشند. توزیع تنش متقارن محوری در محیط بینهایت ایزوتروپ شامل ترک حلقوی مسطح در معرض پیچش محوری، توسط دنی‌لاک[1] و سینگ [۹] مورد بررسی قرار گرفت و روابطی تقریبی برای ضرایب شدت تنش ترک ارائه گردید، به گونه‌ای که نتایج ضرایب شدت تنش برای نسبت‌های شعاع داخلی به شعاع خارجی ترک بزرگتر از ۰/۶ به علت دقت کم ارائه نگردیدند.

شجاع[2] و همکاران [۱۰] اندرکنش ترک حلقوی و سکه‌ای در محیط پیزوالکتریک، به طوری که محیط تحت بارگذاری میدان دور ایجاکننده مود بازشدگی قرار داشت، را مورد بررسی قرار دادند. ترک سکه‌ای واقع در عمق دلخواه محیط نیمه بینهایت ایزوتروپ جانبی تحت بارگذاری قائم دینامیکی توسط اسکندری‌قادی[3] و همکاران [۱۱] مورد مطالعه قرار گرفت و اثرات ناهمسانی محیط بر روی پاسخ‌های محیط بررسی گردید. ضرایب شدت تنش مربوط به ترک حلقوی دارای خروج از مرکزیت، ناشی از بارگذاری دلخواه که ایجاد کننده مود یک شکست است، توسط معینی‌اردکانی[4] و همکاران [۱۲] مورد ارزیابی قرار گرفتند.

در این پژوهش حل تحلیلی اندرکنش محیط ایزوتروپ جانبی و ترک حلقوی مسطح تحت شرایط مرزی متفاوت مورد بررسی قرار میگیرد. با استفاده از معادلات حاکم بر محیط و جایگذاری آنها در شرایط مرزی مساله مورد بررسی، معادلات انتگرالی سه‌گانه حاصل میگردند. این معادلات با کمک تبدیل‌های ابل و هنکل به دو معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم کاهش پیدا میکنند. به دلیل پیچیدگی معادلات، با به کارگیری روش عددی مناسب ضرایب شدت تنش برای نسبت‌های مختلف شعاع داخلی ترک به شعاع خارجی ترک محاسبه میشوند و جهت رشد ترک به همراه حالت‌های خاص مساله از جمله ترک سکه‌ای و ترک خارجی مورد بحث قرار میگیرند.

۲- معادلات کلی حاکم بر مساله

محیط ارتجاعی با رفتار ایزوتروپ جانبی را در دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) چنان در نظر می‌گیریم که محور عمود بر صفحه ایزوتروپی باشد. در این صورت معادلات تعادل استاتیکی بر حسب تغییرمکان‌ها در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌گردند [۱۳]:

$$
\begin{aligned}
&c_{11}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}\right)+c_{66}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}+\frac{c_{11}+c_{12}}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right)\\
&-2c_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\left(c_{13}+c_{44}\right)\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}=0,\\
&c_{66}\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r^2}\right)+c_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}+\frac{c_{11}+c_{12}}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right)\\
&+2c_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\left(c_{13}+c_{44}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta\partial z}=0,\\
&c_{44}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}\right)+c_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\left(c_{13}+c_{44}\right)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta\partial z}\right)=0
\end{aligned}
\quad (۱)
$$

که در آن u_r, u_θ, u_z مولفه‌های برداری تغییرمکان به ترتیب در امتدادهای r,θ,z و همچنین c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33} و c_{44} پنج ثابت الاستیسیته محیط ایزوتروپ جانبی جامد می‌باشند به طوری که $c_{66}=(c_{11}-c_{12})/2$. معادلات تعادل ۱، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل درگیر با مشتقات پارهای میباشند که با استفاده از دو تابع پتانسیل به دو معادله دیفرانسیل مستقل تبدیل میگردند. با استفاده از سری مختلط فوریه در امتداد θ و همچنین تبدیل هنکل مرتبه mام نسبت به امتداد شعاعی در دستگاه استوانه‌ای، مساله تبدیل به حل دو معادله دیفرانسیل معمولی کاملاً مجزا از هم برای توابع پتانسیل در فضای تبدیل یافته هنکل میشود. یکی از دلایل استفاده از تبدیلات در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای کاهش متغیرهای مستقل معادله و تبدیل آن به معادله دیفرانسیل معمولی میباشد. همچنین معمولاً شرایط مرزی به صورت توابع قطعه‌ای پیوسته وجود دارند و تبدیلات انتگرالی این شرایط را به صورت توابع پیوسته در فضای تبدیل یافته در می‌آورند. صرف نظر از محاسبات ریاضی روش یاد شده، میدان‌های تغییرمکان و تنش به طور کلی عبارتند از [۱۴] :

$$\tilde{u}_{r\,m}^{\;m+1}+i\tilde{u}_{\theta\,m}^{\;m+1}=\alpha_3\xi\frac{\partial\tilde{F}_m^m}{\partial z}-i\xi\tilde{\chi}_m^m \quad (۲)$$

$$\tilde{u}_{r\,m}^{\;m-1}-i\tilde{u}_{\theta\,m}^{\;m-1}=-\alpha_3\xi\frac{\partial\tilde{F}_m^m}{\partial z}-i\xi\tilde{\chi}_m^m \quad (۳)$$

$$\tilde{u}_{z\,m}^{\;m}=\left[\alpha_2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}-\xi^2\left(1+\alpha_1\right)\right]\tilde{F}_m^m \quad (۴)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz\,m}^{\;m}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\alpha_3c_{13}\xi^2-c_{33}\xi^2\left(1+\alpha_1\right)+c_{33}\alpha_2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\right]\tilde{F}_m^m \quad (۵)$$

$$\tilde{\sigma}_{zr\,m}^{\;m+1}+i\tilde{\sigma}_{z\theta\,m}^{\;m+1}=c_{44}\xi\left[\left(\alpha_3-\alpha_2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+\xi^2\left(1+\alpha_1\right)\right]\tilde{F}_m^m-c_{44}\xi i\frac{\mathrm{d}\tilde{\chi}_m^m}{\mathrm{d}z} \quad (۶)$$

$$\tilde{\sigma}_{zr\,m}^{\;m-1}-i\tilde{\sigma}_{z\theta\,m}^{\;m-1}=-c_{44}\xi\left[\left(\alpha_3-\alpha_2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+\xi^2\left(1+\alpha_1\right.\right]\tilde{F}_m^m-c_{44}\xi i\frac{\mathrm{d}\tilde{\chi}_m^m}{\mathrm{d}z} \quad (۷)$$

که زیرنویس m نشان‌دهنده ضریب mام سری فوریه و بالانویس و علامت مد نشان‌دهنده مرتبه تبدیل هنکل می‌باشند. ضرایب دیگر به صورت زیر تعریف می‌گردند:

1 Danyluk
2 Shodja
3 Eskandari-Ghadi
4 Moeini-Ardakani

$$\alpha_1=\frac{c_{12}+c_{66}}{c_{66}},\qquad \alpha_2=\frac{c_{44}}{c_{66}},\qquad \alpha_3=\frac{c_{13}+c_{44}}{c_{66}} \tag{۸}$$

$$\tilde{F}_m^m\left(\xi,z\right)=A_m\left(\xi\right)\mathrm{e}^{-\xi s_1 z}+B_m\left(\xi\right)\mathrm{e}^{-\xi s_2 z} \tag{۹}$$

$$\tilde{\chi}_m^m\left(\xi,z\right)=C_m\left(\xi\right)\mathrm{e}^{-\xi s_0 z} \tag{۱۰}$$

به طوری که $A_m(\xi)$، $B_m(\xi)$ و $C_m(\xi)$ توابعی مجهولی میباشند که با استفاده از شرایط مرزی به دست میآیند. همچنین در روابط فوق $s_0=1/\sqrt{a_2}$ و پارامترهای s_1 و s_2 ریشه‌های معادله زیر می‌باشند که نمی‌توانند صفر و موهومی خالص باشند [۱۳].

$$c_{33}c_{44}s^4-\left[c_{11}c_{33}+c_{44}^2-\left(c_{13}+c_{44}\right)^2\right]s^2+c_{11}c_{44}=0 \tag{۱۱}$$

۳- مود اول شکست

۳- ۱- تعریف مساله و حل معادلات انتگرالی سه‌گانه

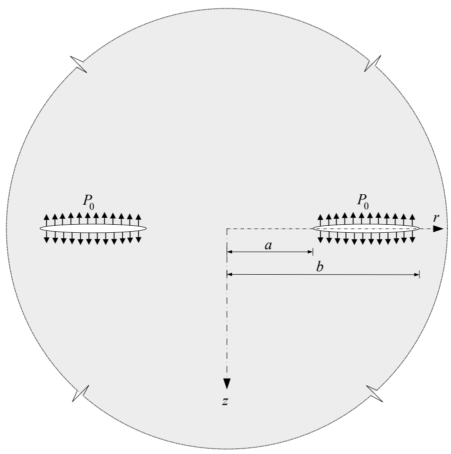
در این حالت مطابق شکل ۱، ترک حلقوی به شعاع داخلی a و b شعاع خارجی در محیط ایزوتروپ جانبی به طوری که سطوح ترک در معرض تنش فشاری به اندازه P(r) باشند (فشار قائم می تواند فشار آب حفرهای تلقی گردد) را در نظر بگیرید. با توجه به تقارن مساله نسبت به صفحه $z=0$، شرایط مرزی برای نیم‌فضای $z\geq 0$ به صورت زیر بیان می‌گردند:

$$u_z\left(r,0\right)=0;\qquad 0\le r\le a \tag{۱۲}$$

$$\sigma_{zz}\left(r,0\right)=-p\left(r\right);\qquad a<r<b \tag{۱۳}$$

$$u_z\left(r,0\right)=0;\qquad b\le r<\infty \tag{۱۴}$$

$$\sigma_{rz}\left(r,0\right)=0;\qquad 0<r<\infty \tag{۱۵}$$



شکل ۱: ترک حلقوی تحت بارگذاری ایجاد کننده مود بازشدگی

Fig. 1. Annular crack under opening mode of loading

با توجه به تقارن محوری موجود در مساله $u_\theta=0$ و $m=0$ می‌باشند. بنابراین با انتخاب میدان های مناسب از روابط ۲ تا ۷ و جایگذاری آنها در روابط ۱۲ تا ۱۵ و اعمال تغییر متغیر مناسب، شرایط مرزی به معادلات انتگرالی سه‌گانه زیر کاهش می‌یابند:

$$\int_0^\infty A'\left(\xi\right)J_0\left(\xi r\right)\mathrm{d}\xi=0;\qquad 0\le r\le a \tag{۱۶}$$

$$\int_0^\infty \xi A'\left(\xi\right)J_0\left(\xi r\right)\mathrm{d}\xi=-\frac{p\left(r\right)}{C_1};\qquad a<r<b \tag{۱۷}$$

$$\int_0^\infty A'\left(\xi\right)J_0\left(\xi r\right)\mathrm{d}\xi=0;\qquad b\le r<\infty \tag{۱۸}$$

که $A'(\xi)$ تابعی مجهول، به طوری که $A(\xi)=A'(\xi)\xi^3$ و ضریب C_1 مطابق رابطه زیر می‌باشد.

$$C_1=-\frac{\left(s_1-s_2\right)\left(-c_{33}\left(1+\alpha_1-s_1^2\alpha_2\right)\left(1+\alpha_1-s_2^2\alpha_2\right)+\left(c_{13}+c_{33}s_1s_2\right)\left(1+\alpha_1+s_1s_2\alpha_2\right)\alpha_3-c_{13}s_1s_2\alpha_3^2\right)}{1+\alpha_1+s_2^2\left(-\alpha_2+\alpha_3\right)} \tag{۱۹}$$

با استفاده از خواص تبدیل هنکل، فرض می کنیم:

$$\int_0^\infty \xi A'\left(\xi\right)J_0\left(\xi r\right)\mathrm{d}\xi=\begin{cases} f_1\left(r\right) & 0<r<a \\ f\left(r\right) & a<r<b \\ f_3\left(r\right) & b<r<\infty \end{cases} \tag{۲۰}$$

که در آن $f\left(r\right)=-p\left(r\right)/C_1$ می‌باشد. با استفاده از خواص تبدیل معکوس هنکل داریم:

$$A'\left(\xi\right)=\int_0^a r f_1\left(r\right)J_0\left(\xi r\right)\mathrm{d}r+\int_a^b r f\left(r\right)J_0\left(\xi r\right)\mathrm{d}r+\int_b^\infty r f_3\left(r\right)J_0\left(\xi r\right)\mathrm{d}r \tag{۲۱}$$

با فرض بالا معادله ۱۷ ارضا میگردد، حال با جایگذاری رابطه ۲۱ در روابط ۱۶ و ۱۸ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\int_0^a \lambda f_1\left(\lambda\right)L\left(\lambda,r\right)\mathrm{d}\lambda+\int_a^b \lambda f\left(\lambda\right)L\left(\lambda,r\right)\mathrm{d}\lambda\\&+\int_b^\infty \lambda f_3\left(\lambda\right)L\left(\lambda,r\right)\mathrm{d}\lambda=0;\qquad 0<r<a,b<r<\infty\end{aligned} \tag{۲۲}$$

$$L\left(\lambda,r\right)=\int_0^\infty J_0\left(\xi\lambda\right)J_0\left(\xi r\right)\mathrm{d}\xi \tag{۲۳}$$

همچنین داریم [۱۵]:

$$\int_0^\infty J_\nu\left(\xi r\right)J_\nu\left(\xi\lambda\right)\mathrm{d}\xi=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\left(\lambda r\right)^\nu}\displaystyle\int_0^{\min(\lambda,r)}\frac{s^{2\nu}\mathrm{d}s}{\left[\left(\lambda^2-s^2\right)\left(r^2-s^2\right)\right]^{1/2}}\\[2ex] \dfrac{2\left(\lambda r\right)^\nu}{\pi}\displaystyle\int_{\max(\lambda,r)}^\infty\frac{s^{-2\nu}\mathrm{d}s}{\left[\left(\lambda^2-s^2\right)\left(r^2-s^2\right)\right]^{1/2}}\end{cases} \tag{۲۴}$$

که

$$\int_a^b \mathrm{d}\lambda \int_0^{\min(\lambda,r)} \mathrm{d}s = \int_a^r \mathrm{d}s \int_s^b \mathrm{d}\lambda + \int_0^a \mathrm{d}s \int_a^b \mathrm{d}\lambda \qquad (۲۵)$$

$$\int_a^b \mathrm{d}\lambda \int_{\max(\lambda,r)}^\infty \mathrm{d}s = \int_r^b \mathrm{d}s \int_a^s \mathrm{d}\lambda + \int_b^\infty \mathrm{d}s \int_a^b \mathrm{d}\lambda \qquad (۲۶)$$

با استفاده از روابط ۲۴ تا ۲۶، رابطه ۲۲ به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\int_0^r \frac{\{F_1(s)+F(s)\}\mathrm{d}s}{\sqrt{r^2-s^2}} = -\int_b^\infty \frac{F_3(s)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{s^2-r^2}}; \qquad 0<r<a \qquad (۲۷)$$

$$\int_r^\infty \frac{\{F_3(s)+F^*(s)\}\mathrm{d}s}{\sqrt{s^2-r^2}} = -\int_0^a \frac{F_1(s)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{r^2-s^2}}; \qquad b<r<\infty \qquad (۲۸)$$

به طوری که

$$F_1(\mathrm{s}) = \int_s^a \frac{\lambda f_1(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{\lambda^2-s^2}}; \qquad 0<s<a \qquad (۲۹)$$

$$F(\mathrm{s}) = \int_a^b \frac{\lambda f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{\lambda^2-s^2}}; \qquad a<s<b \qquad (۳۰)$$

$$F^*(\mathrm{s}) = \int_a^b \frac{\lambda f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{s^2-\lambda^2}}; \qquad a<s<b \qquad (۳۱)$$

$$F_3(\mathrm{s}) = \int_b^s \frac{\lambda f_3(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{s^2-\lambda^2}}; \qquad b<s<\infty \qquad (۳۲)$$

با توجه به اینکه معادلات ۲۷ و ۲۸ از نوع معادلات ابل می‌باشند، داریم:

$$F_1(s) = -F(s) - \frac{2}{\pi}\int_b^\infty \frac{uF_3(u)\,\mathrm{d}u}{u^2-s^2}; \qquad 0<r<a \qquad (۳۳)$$

$$F_3(s) = -F^*(s) - \frac{2s}{\pi}\int_0^a \frac{F_1(u)\,\mathrm{d}u}{s^2-u^2}; \qquad b<r<\infty \qquad (۳۴)$$

سرانجام مساله مورد بررسی به دو معادله فردهلم نوع دوم ۳۳ و ۳۴ کاهش میيابد. با توجه به پیچیدگی معادلات یاد شده، معادلات با استفاده از روش عددی مناسب و به کمک نرم‌افزار Mathematica حل میگردند. با حل این معادلات، ضرایب شدت تنش نوک داخلی و خارجی ترک حلقوی حاصل میشوند.

۳- ۲- ضریب شدت تنش مود بازشدگی

ضرایب شدت تنش مود بازشدگی، بیان کننده وضعیت تنش در نوک ترک، مطابق رابطه زیر تعریف می‌گردند:

$$K_{\mathrm{I}}^a = \lim_{r\to a^-} \sqrt{2(a-r)}\,\sigma_{zz}(r,0) \qquad (۳۵)$$

$$K_{\mathrm{I}}^b = \lim_{r\to b^+} \sqrt{2(r-b)}\,\sigma_{zz}(r,0) \qquad (۳۶)$$

از طرفی داریم:

$$\sigma_{zz}(r,0) = C_1\int_0^\infty A'(\xi)J_0(\xi r)\,\mathrm{d}\xi = \begin{cases} C_1 f_1(r) & 0<r<a \\ C_1 f_3(r) & b<r<\infty \end{cases} \qquad (۳۷)$$

از روابط ۲۹ و ۳۲ خواهیم داشت:

$$f_1(\lambda) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{F_1(a)}{\sqrt{a^2-\lambda^2}} - \int_\lambda^a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(F_1(s)\big)\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s^2-\lambda^2}}\right]; \qquad 0<\lambda<a \qquad (۳۸)$$

$$f_3(\lambda) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{F_3(b)}{\sqrt{\lambda^2-b^2}} + \int_b^\lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(F_3(s)\big)\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\lambda^2-s^2}}\right]; \qquad b<\lambda<\infty \qquad (۳۹)$$

با استفاده از روابط ۳۷ تا ۳۹، روابط ۳۵ و ۳۶ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$K_{\mathrm{I}}^a = \frac{2C_1}{\pi\sqrt{a}}F_1(a) \qquad (۴۰)$$

$$K_{\mathrm{I}}^b = \frac{2C_1}{\pi\sqrt{b}}F_3(b) \qquad (۴۱)$$

۳- ۳- حالت های خاص

۳- ۳- ۱- ترک سکه‌ای شکل

زمانی که شعاع داخلی ترک حلقوی به سمت صفر میل نماید $(a\to 0)$، ترک حلقوی به ترک سکه‌ای تبدیل می‌گردد و رابطه دقیق ضریب شدت تنش مود بازشدگی به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$K_{\mathrm{I}}^b = \frac{2}{\pi\sqrt{b}}\int_0^b \frac{\lambda p(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{b^2-\lambda^2}} \qquad (۴۲)$$

در رابطه بالا، زمانی که $p(r)=p_0$ ، داریم:

$$K_{\mathrm{I}}^b = \frac{2\sqrt{b}}{\pi}p_0 \qquad (۴۳)$$

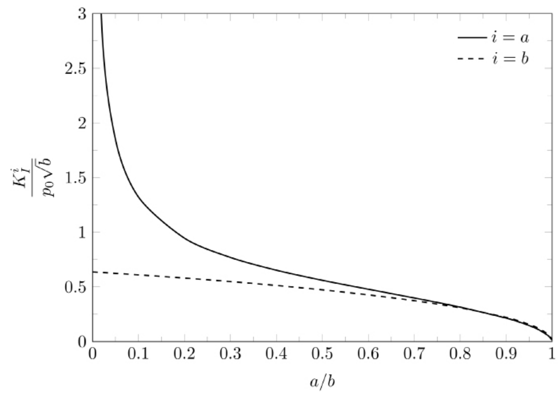
۳- ۳- ۲- ترک خارجی

زمانی که شعاع خارجی ترک حلقوی به سمت بی‌نهایت میل نماید $(b\to\infty)$، ترک حلقوی به ترک خارجی تبدیل می‌گردد و رابطه دقیق زیر حاصل می‌شود:

$$K_{\mathrm{I}}^a = \frac{2}{\pi\sqrt{a}}\int_a^\infty \frac{\lambda p(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{\lambda^2-a^2}} \qquad (۴۴)$$

روابط ۴۲ تا ۴۴ با روابط ارائه شده توسط کسیر[1] و سیه[2] [۱۶] و سلوادرای و سینگ [۸] تطابق دارند.

1 Kassir
2 Sih



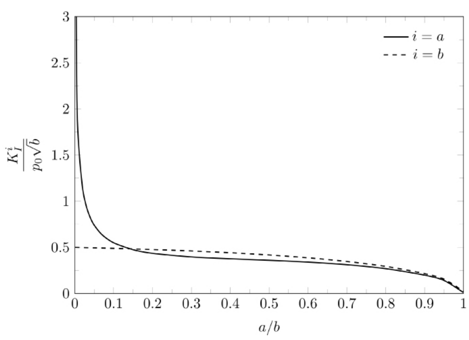
شکل ۲: ضرایب شدت تنش مود یک برای حالت $p(r)=p_0$

Fig. 2. Normalized SIFs of mode I ($p(r)=p_0$)

۳- ۴- نتایج عددی و بحث

با انتخاب دو نوع بارگذاری یکنواخت و خطی، نتایج عددی برای ترک حلقوی در معرض مود بازشدگی به دست آمده است. همان طور که از روابط ۴۰ و ۴۱ مشخص میباشد خواص محیط در ضریب C_1 گنجانده شده است. همچنین از روابط ۳۳ و ۳۴ مشخص میباشد که $F_1(a)$ و $F_3(b)$ ضریبی از $1/C_1$ میباشند، بنابراین میتوان نتیجه گرفت که ضرایب شدت تنش مستقل از نوع محیط بوده و فقط به نوع بارگذاری وابسته میباشند. بنابراین ضرایب شدت تنش مصالح مختلف یکسان میباشند.

همانطور که از نمودار ۲ مشخص است، در هنگام بارگذاری یکنواخت ضریب شدت تنش مربوط به نوک داخلی ترک در بازه وسیعی از a/b نسبت به ضریب شدت تنش مربوط به نوک خارجی ترک بزرگتر میباشد. به طوری که در ابتدای نمودار ضریب شدت تنش نوک داخلی بسیار بزرگتر بوده و با افزایش نسبت a/b ضرایب شدت تنش نوک داخلی و خارجی ترک به یکدیگر نزدیکتر میگردند و زمانی که طول ترک کوچک میشود، ضریب شدت تنش خارجی مقدار کمی بزرگتر میگردد. بنابراین به طور کلی میتوان اینگونه نتیجه گرفت که در این حالت، ترک تمایل به رشد در جهت مرزهای داخلی خود را دارد.



شکل ۳: ضرایب شدت تنش مود یک برای حالت $p(r)=p_0r/b$

Fig. 3. Normalized SIFs of mode I ($p(r)=p_0r/b$)

نمودار ۳ که مربوط به بارگذاری خطی میباشد گویای آن است که به هنگام افزایش طول ترک، ضریب شدت تنش نوک داخلی ترک بزرگتر و زمانی که طول ترک به مرور کوچک می‌گردد، ضریب شدت تنش مربوط به نوک خارجی ترک نسبت به نوک داخلی ترک بزرگتر میگردد و ترک خواهان توسعه در جهت مرزهای خارجی خود میباشد. نکته‌ی دیگری که از نمودارهای ۲ و ۳ میتوان برداشت نمود این است که همواره ضرایب شدت تنش نوک داخلی و خارجی ترک با کاهش طول ترک، کاهش می‌یابند به طوری که ضریب شدت تنش نوک داخلی ترک با شیب تندتری نسبت به ضریب شدت تنش خارجی ترک دچار کاهش می‌گردد.

۴- مود دوم شکست

۴- ۱- تعریف مساله و حل معادلات انتگرالی سه‌گانه

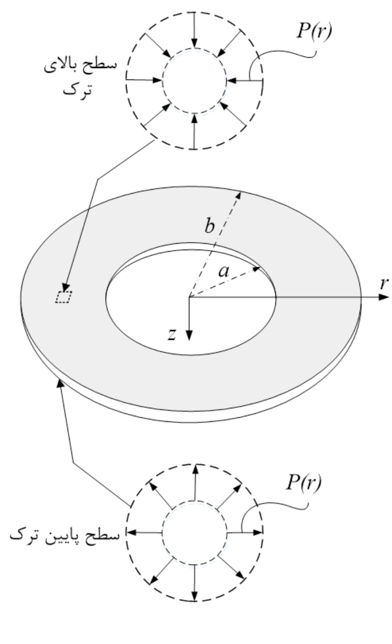
در این حالت مطابق شکل ۴، ترک حلقوی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b در محیط ایزوتروپ جانبی به طوری که سطوح ترک در معرض تنش برشی شعاعی به اندازه $p(r)$ باشند، را در نظر بگیرید. با توجه به تقارن مساله نسبت به صفحه $z=0$، شرایط مرزی برای نیم‌فضای $z\geq0$ به صورت زیر بیان می‌گردند:

$$u_r(r,0)=0;\qquad 0\leq r\leq a \tag{۴۵}$$

$$\sigma_{rz}(r,0)=-p(r);\qquad a<r<b \tag{۴۶}$$

$$u_r(r,0)=0;\qquad b\leq r<\infty \tag{۴۷}$$

$$\sigma_{zz}(r,0)=0;\qquad 0<r<\infty \tag{۴۸}$$



شکل ۴: ترک حلقوی تحت بارگذاری ایجاد کننده مود برشی

Fig. 4. Annular crack under shearing mode of loading

با توجه به تقارن محوری موجود در مساله $u_\theta=0$ و $m=0$ می‌باشند. بنابراین با انتخاب میدان‌های مناسب از روابط ۲ تا ۷ و جایگذاری آنها در روابط ۴۵ تا ۴۸ و اعمال تغییر متغیر مناسب، شرایط مرزی به معادلات انتگرالی سه‌گانه زیر کاهش می‌یابند:

$$\int_0^\infty A'\ \ \xi\ \ J_1\ \ \xi r\ \ \mathrm{d}\xi = 0; \qquad 0 \le r \le a \tag{۴۹}$$

$$\int_0^\infty \xi A'\ \ \xi\ \ J_1\ \ \xi r\ \ \mathrm{d}\xi = -\frac{p\ \ r}{C_2}; \qquad a < r < b \tag{۵۰}$$

$$\int_0^\infty A'\ \ \xi\ \ J_1\ \ \xi r\ \ \mathrm{d}\xi = 0; \qquad b \le r < \infty \tag{۵۱}$$

که $A'\ \xi)$ تابعی مجهول، به طوری که $\xi^3 A(\xi) = A'(\xi)$ و ضریب C_2 مطابق رابطه زیر می‌باشد.

$$C_2 = c_{44}\left(\frac{s_1\ \ s_1 - s_2\ \ \ \alpha_2 - \alpha_3\ \ \ c_{33}\ \ 1+\alpha_1 + s_1 s_2 \alpha_2\ \ -c_{13}\alpha_3}{-c_{33}\ \ 1+\alpha_1 - s_2^2\alpha_2\ \ +c_{13}\alpha_3} +\ \ 1+\alpha_1\ \left(1+\frac{s_1\ \ c_{33}\ \ 1+\alpha_1 - s_1^2\alpha_2\ \ -c_{13}\alpha_3}{s_2\ \ -c_{33}\ \ 1+\alpha_1 - s_2^2\alpha_2\ \ +c_{13}\alpha_3}\right)\right) \tag{۵۲}$$

با استفاده از خواص تبدیل هنکل، فرض می‌کنیم:

$$\int_0^\infty \xi A'\ \ \xi\ \ J_1\ \ \xi r\ \ \mathrm{d}\xi = \begin{cases} f_1\ \ r & 0 < r < a \\ f\ \ r & a < r < b \\ f_3\ \ r & b < r < \infty \end{cases} \tag{۵۳}$$

که در آن $f(r) = -p(r)/C_2$ می‌باشد. با استفاده از خواص تبدیل معکوس هنکل، داریم:

$$A'(\xi) = \int_0^a r\, f_1(r) J_1(\xi r)\mathrm{d}r + \int_a^b r\, f(r)\ J_1(\xi r)\mathrm{d}r + \int_b^\infty r\, f_3(r)\ J_1(\xi r)\mathrm{d}r \tag{۵۴}$$

با فرض بالا معادله ۵۰ ارضا می‌گردد، حال با جایگذاری رابطه ۵۴ در روابط ۴۹ و ۵۱ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\int_0^a \lambda f_1(\lambda) L(\lambda, r)\mathrm{d}\lambda + \int_a^b \lambda f(\lambda) L(\lambda, r)\mathrm{d}\lambda + \\ &\int_b^\infty \lambda f_3(\lambda) L(\lambda, r)\mathrm{d}\lambda = 0; \qquad 0 < r < a, b < r < \infty \end{aligned} \tag{۵۵}$$

$$L(\lambda, r) = \int_0^\infty J_1(\xi\lambda) J_1(\xi r)\mathrm{d}\xi \tag{۵۶}$$

با استفاده از روابط ۲۴ تا ۲۶، رابطه ۵۵ به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\int_0^r \frac{\{F_1(s) + F(s)\}\mathrm{d}s}{\sqrt{r^2 - s^2}} = -r^2 \int_b^\infty \frac{F_3(s)\mathrm{d}s}{s^2\sqrt{s^2 - r^2}}; \qquad 0 < r < a \tag{۵۷}$$

$$\int_r^\infty \frac{\{F_3(s) + F^*(s)\}\mathrm{d}s}{s^2\sqrt{s^2 - r^2}} = -\frac{1}{r^2}\int_0^a \frac{F_1(s)\mathrm{d}s}{\sqrt{r^2 - s^2}}; \qquad b < r < \infty \tag{۵۸}$$

به طوری که

$$F_1(\mathrm{s}) = s^2 \int_s^a \frac{f_1(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - s^2}}; \qquad 0 < s < a \tag{۵۹}$$

$$F(\mathrm{s}) = s^2 \int_a^b \frac{f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - s^2}}; \qquad a < s < b \tag{۶۰}$$

$$F^*(\mathrm{s}) = \int_a^b \frac{\lambda^2 f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{s^2 - \lambda^2}}; \qquad a < s < b \tag{۶۱}$$

$$F_3(\mathrm{s}) = \int_b^s \frac{\lambda^2 f_3(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{s^2 - \lambda^2}}; \qquad b < s < \infty \tag{۶۲}$$

با توجه به اینکه معادلات ۵۷ و ۵۸ از نوع معادلات ابل می‌باشند، داریم:

$$F_1(\mathrm{s}) = -F(\mathrm{s}) - \frac{2}{\pi}\int_b^\infty \left[-\frac{s^2}{u\left(s^2 - u^2\right)} + \frac{s}{2u^2}\log_e\left|\frac{s+u}{s-u}\right|\right] F_3(\mathrm{u})\mathrm{d}u; \qquad 0 < s < a \tag{۶۳}$$

$$F_3(s) = -F^*(s) - \frac{2}{\pi}\int_0^a \left[\frac{s}{(s^2 - u^2)} + \frac{1}{2u}\log_e\left|\frac{s+u}{s-u}\right|\right] F_1(u)\mathrm{d}u; \qquad b < s < \infty \tag{۶۴}$$

سرانجام مساله مورد بررسی به معادلات فردهلم نوع دوم ۶۳ و ۶۴ منجر می‌گردد که با حل این معادلات به صورت عددی ضرایب شدت تنش نوک داخلی و خارجی ترک حلقوی حاصل می‌گردند.

۴- ۲- ضریب شدت تنش مود برشی (درون صفحه)

ضرایب شدت تنش مود برشی، مطابق رابطه زیر تعریف می‌گردند:

$$K_{\mathrm{II}}^a = \lim_{r \to a^-} \sqrt{2(a - r)}\,\sigma_{rz}(r, 0) \tag{۶۵}$$

$$K_{\mathrm{II}}^b = \lim_{r \to b^+} \sqrt{2(r - b)}\,\sigma_{rz}(r, 0) \tag{۶۶}$$

از طرفی داریم:

$$\sigma_{rz}(r, 0) = C_2 \int_0^\infty A'(\xi) J_1(\xi r)\mathrm{d}\xi = \begin{cases} C_2\, f_1(r) & 0 < r < a \\ C_2\, f_3(r) & b < r < \infty \end{cases} \tag{۶۷}$$

از روابط ۵۹ و ۶۲ خواهیم داشت:

$$f_1(\lambda) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\lambda F_1(a)}{a^2\sqrt{a^2 - \lambda^2}} - \lambda\int_\lambda^a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{F_1(s)}{s^2}\right)\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s^2 - \lambda^2}}\right]; \qquad 0 < \lambda < a \tag{۶۸}$$

$$f_3(\lambda) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{F_3(b)}{\lambda\sqrt{\lambda^2 - b^2}} + \frac{1}{\lambda}\int_b^\lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(F_3(s)\right)\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\lambda^2 - s^2}}\right]; \qquad b < \lambda < \infty \tag{۶۹}$$

با استفاده از روابط ۶۷ تا ۶۹، روابط ۶۵ و ۶۶ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$K_{\mathrm{II}}^a = \frac{2C_2}{\pi a^{3/2}} F_1(a) \tag{۷۰}$$

$$K_{\mathrm{II}}^b = \frac{2C_2}{\pi b^{3/2}} F_3(b) \tag{۷۱}$$

۴- ۳- حالت‌های خاص

۴- ۳- ۱- ترک سکه‌ای شکل

زمانی که شعاع داخلی ترک حلقوی به سمت صفر میل نماید $(a \to 0)$،

ترک حلقوی به ترک سکه‌ای تبدیل می‌گردد و رابطه دقیق ضریب شدت تنش مود برشی به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$K_{\mathrm{II}}^{b}=\frac{2}{\pi b^{3/2}}\int_{0}^{b}\frac{\lambda^{2}p(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{b^{2}-\lambda^{2}}} \quad (۷۲)$$

۴- ۳- ۲- ترک خارجی

زمانی که شعاع خارجی ترک حلقوی به سمت بی‌نهایت میل نماید $(b\rightarrow\infty)$ ، ترک حلقوی به ترک خارجی تبدیل می‌گردد و رابطه دقیق زیر حاصل می‌شود:

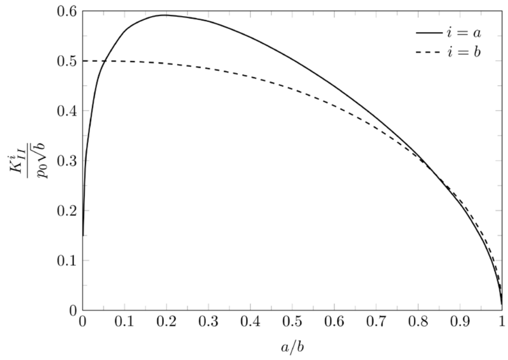
$$K_{\mathrm{II}}^{a}=\frac{2\sqrt{a}}{\pi}\int_{a}^{\infty}\frac{p(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{\lambda^{2}-a^{2}}} \quad (۷۳)$$

روابط ۷۲ و ۷۳ با روابط ارائه شده توسط کسیر و سیه [۱۶] تطابق دارند.

۴- ۴- نتایج عددی و بحث

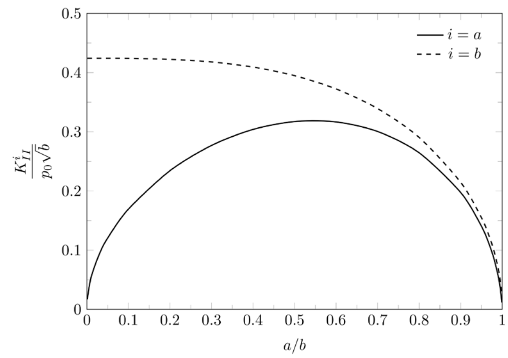
با انتخاب دو نوع بارگذاری یکنواخت و خطی نتایج عددی برای ترک حلقوی در معرض مود برشی به دست آمده است. با در نظر گرفتن روابط ۶۳، ۶۴، ۷۰ و ۷۱ مشخص می‌گردد که ضرایب شدت تنش مستقل از نوع محیط بوده و فقط به بارگذاری وابسته می‌باشند. بنابراین ضرایب شدت تنش مصالح مختلف یکسان می‌باشند.

ضرایب شدت تنش مود برشی مربوط به نوک داخلی و خارجی ترک تحت بارگذاری شعاعی برشی یکنواخت در نمودار ۵ نشان داده شده‌اند. همانگونه که ملاحظه می‌گردد ضریب شدت تنش خارجی ترک همواره با کوچکتر شدن طول ترک کاهش می‌یابد به طوری که با نزدیک شدن a/b به مقدار واحد، کاهش این ضریب شدت می‌گیرد، در حالی که تغییرات ضریب شدت تنش نوک داخلی ترک یکنواخت نیست. نمودار ۶ نشان‌دهنده ضرایب شدت تنش نوک داخلی و خارجی ترک به ازای بارگذاری خطی برشی می‌باشد. همان طور که مشخص است، ضریب شدت تنش مربوط به نوک داخلی ترک تا نسبتی از a/b افزایش، سپس دچار کاهش و به سمت صفر میل پیدا میکند در صورتی که ضریب شدت تنش مربوط به نوک خارجی همواره با افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ترک دچار کاهش می‌گردد. با توجه به اینکه همواره $K^{b}_{\mathrm{II}} > K^{a}_{\mathrm{II}}$ است، ترک تمایل به رشد در جهت مرزهای خارجی خود را دارد.



شکل ۵: ضرایب شدت تنش مود دو برای حالت $p(r)=p_0$

Fig. 5. Normalized SIFs of mode II ($p(r)=p_0$)



شکل ۶: ضرایب شدت تنش مود دو برای حالت $p(r)=p_0r/b$

Fig. 6. Normalized SIFs of mode II ($p(r)=p_0r/b$)

۵- مود سوم شکست

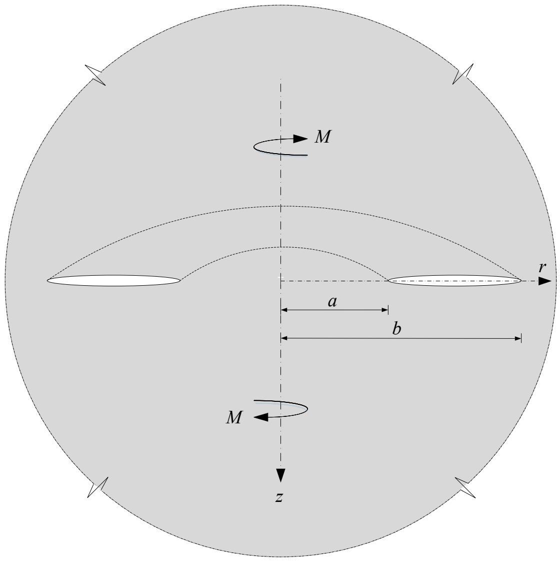
۵- ۱- تعریف مساله و حل معادلات انتگرالی سه‌گانه

در این حالت مطابق شکل ۷، ترک حلقوی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b در محیط ایزوتروپ جانبی به گونه‌ای که محیط در معرض پیچش محوری قرار گرفته است، را در نظر بگیرید. با توجه به تقارن مساله نسبت به صفحه z=0، شرایط مرزی برای نیم‌فضای $z\geq 0$ به صورت زیر بیان می‌گردند:

$$u_{\theta}(r,0)=0; \qquad 0\leq r\leq a \quad (۷۴)$$

$$\sigma_{\theta z}(r,0)=-p(r); \qquad a<r<b \quad (۷۵)$$

$$u_{\theta}(r,0)=0; \qquad b\leq r<\infty \quad (۷۶)$$



شکل ۷: ترک حلقوی تحت بارگذاری ایجاد کننده مود پارگی

Fig. 7. Annular crack under tearing mode of loading

با توجه به تقارن محوری موجود در مساله $u_z=0$، $u_\theta=0$ و $m=0$ می‌باشند. بنابراین با انتخاب میدان‌های مناسب از روابط ۲ تا ۷ و جایگذاری آنها در روابط ۷۴ تا ۷۶ و اعمال تغییر متغیر مناسب، شرایط مرزی به معادلات انتگرالی سه‌گانه زیر کاهش می‌یابند:

$$\int_0^\infty C'(\xi) J_1(\xi r)\mathrm{d}\xi = 0; \qquad 0 \le r \le a \tag{۷۷}$$

$$\int_0^\infty \xi\, C'(\xi) J_1(\xi r)\mathrm{d}\xi = \frac{p(r)}{s_0 c_{44}}; \qquad a < r < b \tag{۷۸}$$

$$\int_0^\infty C'(\xi) J_1(\xi r)\mathrm{d}\xi = 0; \qquad b \le r < \infty \tag{۷۹}$$

که $C'(\xi)$ تابعی مجهول، به طوری که $C'(\xi) = \xi\, C(\xi)$ می‌باشد.
با استفاده از خواص تبدیل هنکل، فرض میکنیم:

$$\int_0^\infty \xi C'(\xi) J_1(\xi r)\mathrm{d}\,\xi = \begin{cases} f_1(r) & 0 < r < a \\ f(r) & a < r < b \\ f_3(r) & b < r < \infty \end{cases} \tag{۸۰}$$

که درآن $f(r) = p(r)/s_0 c_{44}$ می‌باشد. با استفاده از خواص تبدیل هنکل، فرض می کنیم:

$$C'(\xi) = \int_0^a r\, f_1(r) J_1(\xi r)\mathrm{d}r + \int_a^b r\, f(r)\, J_1(\xi r)\mathrm{d}r + \int_b^\infty r\, f_3(r)\, J_1(\xi r)\mathrm{d}r \tag{۸۱}$$

با فرض بالا معادله ۷۸ ارضا میگردد، حال با جایگذاری رابطه ۸۱ در روابط ۷۷ و ۷۹ خواهیم داشت:

$$\int_0^a \lambda f_1(\lambda) L(\lambda,r)\mathrm{d}\lambda + \int_a^b \lambda f(\lambda) L(\lambda,r)\mathrm{d}\lambda + \int_b^\infty \lambda f_3(\lambda) L(\lambda,r)\mathrm{d}\lambda = 0; \quad 0 < r < a, b < r < \infty \tag{۸۲}$$

$$L(\lambda,r) = \int_0^\infty J_1(\xi\lambda) J_1(\xi r)\mathrm{d}\xi \tag{۸۳}$$

با استفاده از روابط ۲۴ تا ۲۶، رابطه ۸۲ به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\int_0^r \frac{\{F_1(s)+F(s)\}\mathrm{d}s}{\sqrt{r^2-s^2}} = -r^2 \int_b^\infty \frac{F_3(s)\mathrm{d}s}{s^2\sqrt{s^2-r^2}}; \qquad 0 < r < a \tag{۸۴}$$

$$\int_r^\infty \frac{\{F_3(s)+F^*(s)\}\mathrm{d}s}{s^2\sqrt{s^2-r^2}} = -\frac{1}{r^2}\int_0^a \frac{F_1(s)\mathrm{d}s}{\sqrt{r^2-s^2}}; \qquad b < r < \infty \tag{۸۵}$$

به طوری که

$$F_1(\mathrm{s}) = s^2 \int_s^a \frac{f_1(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{\lambda^2-s^2}}; \qquad 0 < s < a \tag{۸۶}$$

$$F(\mathrm{s}) = s^2 \int_a^b \frac{f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{\lambda^2-s^2}}; \qquad a < s < b \tag{۸۷}$$

$$F^*(\mathrm{s}) = \int_a^b \frac{\lambda^2 f(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{s^2-\lambda^2}}; \qquad a < s < b \tag{۸۸}$$

$$F_3(\mathrm{s}) = \int_b^s \frac{\lambda^2 f_3(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{s^2-\lambda^2}}; \qquad b < s < \infty \tag{۸۹}$$

با توجه به اینکه معادلات ۸۴ و ۸۵ از نوع معادلات ابل می‌باشند، داریم:

$$F_1(\mathrm{s}) = -F(\mathrm{s}) - \frac{2}{\pi}\int_b^\infty \left[-\frac{s^2}{u(s^2-u^2)} + \frac{s}{2u^2}\log_e\left|\frac{s+u}{s-u}\right|\right] F_3(\mathrm{u})\mathrm{d}u; \qquad 0 < s < a \tag{۹۰}$$

$$F_3(s) = -F^*(s) - \frac{2}{\pi}\int_0^a \left[\frac{s}{(s^2-u^2)} + \frac{1}{2u}\log_e\left|\frac{s+u}{s-u}\right|\right] F_1(u)\mathrm{d}u; \qquad b < s < \infty \tag{۹۱}$$

سرانجام مساله مورد بررسی به معادلات فردهلم نوع دوم ۹۰ و ۹۱ منجر می‌گردد که با حل عددی این معادلات ضرایب شدت تنش نوک داخلی و خارجی ترک حلقوی حاصل می‌گردند.

۵- ۲- ضریب شدت تنش مود پارگی(برش خارج از صفحه)

ضرایب شدت تنش مود پارگی، مطابق رابطه زیر تعریف می‌گردند:

$$K_{\mathrm{III}}^a = \lim_{r\to a^-}\sqrt{2(a-r)}\,\sigma_{\theta z}(r,0) \tag{۹۲}$$

$$K_{\mathrm{III}}^b = \lim_{r\to b^+}\sqrt{2(r-b)}\,\sigma_{\theta z}(r,0) \tag{۹۳}$$

از طرفی داریم:

$$\sigma_{rz}(r,0) = -s_0 c_{44}\int_0^\infty C'(\xi) J_1(\xi r)\mathrm{d}\xi = \begin{cases} -s_0 c_{44} f_1(r) & 0 < r < a \\ -s_0 c_{44} f_3(r) & b < r < \infty \end{cases} \tag{۹۴}$$

از روابط ۸۶ و۸۹ خواهیم داشت:

$$f_1(\lambda)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\lambda F_1(a)}{a^2\sqrt{a^2-\lambda^2}}-\lambda\int_\lambda^a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{F_1(s)}{s^2}\right)\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s^2-\lambda^2}}\right];\quad 0<\lambda<a \tag{۹۵}$$

$$f_3(\lambda)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{F_3(b)}{\lambda\sqrt{\lambda^2-b^2}}+\frac{1}{\lambda}\int_b^\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(F_3(s)\right)\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\lambda^2-s^2}}\right];\quad b<\lambda<\infty \tag{۹۶}$$

با استفاده از روابط ۹۴ تا ۹۶، روابط ۹۲ و ۹۳ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$K_{\mathrm{III}}^a=-\frac{2s_0c_{44}}{\pi a^{3/2}}F_1(a) \tag{۹۷}$$

$$K_{\mathrm{III}}^b=-\frac{2s_0c_{44}}{\pi b^{3/2}}F_3(b) \tag{۹۸}$$

۵- ۳- حالت‌های خاص

۵- ۳- ۱- ترک سکه‌ای شکل

زمانی که شعاع داخلی ترک حلقوی به سمت صفر میل نماید $(a\to 0)$، ترک حلقوی به ترک سکه‌ای تبدیل می‌گردد و رابطه دقیق ضریب شدت تنش مود پارگی به صورت زیر حاصل می‌گردد:

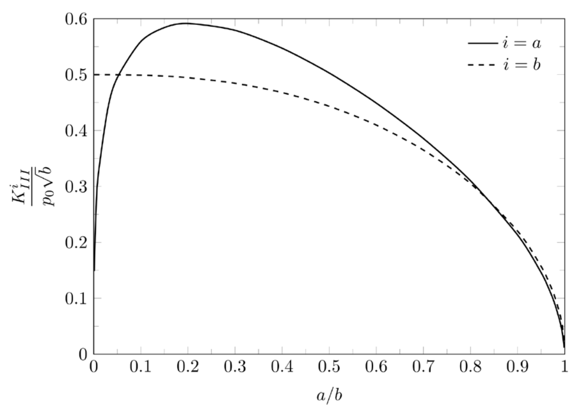
$$K_{\mathrm{III}}^b=\frac{2}{\pi b^{3/2}}\int_0^b\frac{\lambda^2 p(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{b^2-\lambda^2}} \tag{۹۹}$$

۵- ۳- ۲- ترک خارجی

زمانی که شعاع خارجی ترک حلقوی به سمت بی‌نهایت میل نماید $(b\to\infty)$ ، ترک حلقوی به ترک خارجی تبدیل می‌گردد و رابطه دقیق زیر حاصل می‌شود:

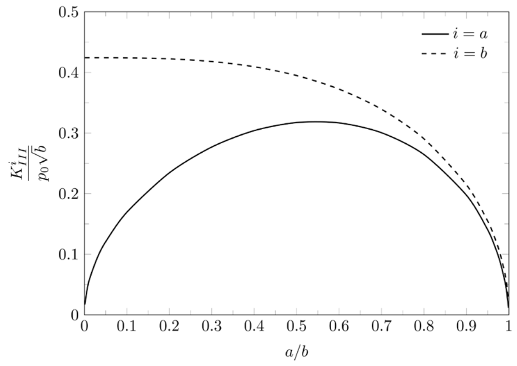
$$K_{\mathrm{III}}^a=\frac{2\sqrt{a}}{\pi}\int_a^\infty\frac{p(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{\lambda^2-a^2}} \tag{۱۰۰}$$

روابط ۹۹ و ۱۰۰ با روابط ارائه شده توسط کسیر و سیه [۱۶] و دنی لاک و سینگ [۹] تطابق دارند.



شکل ۸: ضرایب شدت تنش مود سه برای حالت $p(r)=p_0$

Fig. 8. Normalized SIFs of mode III $(p(r)=p_0)$



شکل ۹: ضرایب شدت تنش مود سه برای حالت $p(r)=p_0r/b$

Fig. 9. Normalized SIFs of mode III $(p(r)=p_0r/b)$

۵- ۴- نتایج عددی و بحث

با انتخاب دو نوع بارگذاری یکنواخت و خطی نتایج عددی برای ترک حلقوی در معرض مود پارگی به دست آمده است. با در نظر گرفتن روابط ۹۰، ۹۱، ۹۷ و ۹۸ مشخص میگردد که ضرایب شدت تنش مستقل از نوع محیط بوده و فقط به بارگذاری وابسته می‌باشند. بنابراین ضرایب شدت تنش مصالح مختلف یکسان می‌باشند. همانگونه که مشخص است نتایج نمودارهای ۸ و ۹ مشابه نتایج نمودارهای ۵ و ۶ میباشند. بنابراین بحث و نتیجه‌گیری آنها نیز در مورد مود سوم شکست نیز صادق می‌باشد.

۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش اندرکنش ترک حلقوی مسطح تحت مودهای مختلف شکست (بازشدگی، برشی و پارگی) با محیط بینهایت ایزوتروپ جانبی مورد بررسی قرار گرفت. با استفاده از میدان‌های تغییرمکان و تنش حاکم بر محیط و جایگذاری آنها در شرایط مرزی، مساله به حل معادلات انتگرالی سه‌گانه تبدیل گردید. در ادامه با استفاده از تبدیل‌های انتگرالی هنکل و ابل، معادلات انتگرالی به معادلات فردهلم که به صورت عددی قابل حل می‌باشند، کاهش پیدا کردند. نتایج ضرایب شدت تنش نوک داخلی و خارجی ترک حلقوی به ازای نسبت‌های مختلف شعاع داخلی ترک به شعاع خارجی ترک محاسبه گردیدند و نتایج حالت‌های خاص نظیر ترک سکه‌ای و ترک خارجی مورد بررسی قرار گرفتند. همچنین نشان داده شد که ضرایب شدت تنش از نوع محیط مستقل می‌باشند و همراه با تغییر در نوع بارگذاری، تغییر می‌یابند.

مراجع

[1] O.V. Menshykov, V.A. Menshykov, I.A. Guz, The contact problem for an open penny-shaped crack under normally incident tension-compression wave, Engineering Fracture Mechanics, 75(5) (2008) 1114-1126.

[2] F. Erdogan, Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks, Journal of Applied Mechanics, 32(2) (1965) 403-410.

[3] B. Smetanin, Problem of extension of an elastic space containing a plane annular slit PMM vol. 32, no. 3, 1968, pp. 458-462, Journal of Applied Mathematics Mechanics, 32 (1968) 461-466.

[4] T. Shibuya, I. Nakahara, T. Koizumi, The axisymmetric distribution of stresses in an infinite elastic solid containing a flat annular crack under internal pressure, ZAMM-Journal of Applied Mathematics Mechanics/ Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 55(7-8) (1975) 395-402.

[5] L. Moss, A. Kobayashi, Approximate analysis of axisymmetric problems in fracture mechanics with application to a flat toroidal crack, International Journal of Fracture Mechanics, 7(1) (1971) 89-99.

[6] E. Mastrojanni, T. Kermanidis, An approximate solution of the annular crack problem, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17(11) (1981) 1605-1611.

[7] I. Choi, R. Shield, Structures, A note on a flat toroidal crack in an elastic isotropic body, International Journal of Solids, 18(6) (1982) 479-486.

[8] A. Selvadurai, B. Singh, The annular crack problem for an isotropic elastic solid, The Quarterly Journal of Mechanics Applied Mathematics, 38(2) (1985) 233-243.

[9] H. Danyluk, B. Singh, Problem of an infinite solid containing a flat annular crack under torsion, Engineering Fracture Mechanics, 24(1) (1986) 33-38.

[10] H.M. Shodja, S.S. Moeini-Ardakani, M. Eskandari, Axisymmetric Problem of Energetically Consistent Interacting Annular and Penny-Shaped Cracks in Piezoelectric Materials, Journal of Applied Mechanics, 78(2) (2010) 021010.

[11] M. Eskandari-Ghadi, A. Ardeshir-Behrestaghi, B.N. Neya, Mathematical analysis for an axissymmetric disc-shaped crack in transversely isotropic half-space, International Journal of Mechanical Sciences, 68 (2013) 171-179.

[12] S. Moeini-Ardakani, M. Kamali, H. Shodja, Eccentric annular crack under general nonuniform internal pressure, Journal of the Mechanical Behavior of Materials, 25(3-4) (2016) 69-76.

[13] S. Lekhnitskii, P. Fern, J.J. Brandstatter, E. Dill, Theory of elasticity of an anisotropic elastic body, Physics Today, 17 (1964) 84.

[14] M. Rahimian, M. Eskandari-Ghadi, R.Y. Pak, A. Khojasteh, Elastodynamic potential method for transversely isotropic solid, Journal of Engineering Mechanics, 133(10) (2007) 1134-1145.

[15] J. Cooke, Triple integral equations, The Quarterly Journal of Mechanics Applied Mathematics, 16(2) (1963) 193-203.

[16] M. Kassir, G.C. Sih, Three-dimensional crack problems: A new selection of crack solutions in three-dimensional elasticity(Book), Leiden, Noordhoff International Publishing, 2 (1975).

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

S. M. Dehghan Manshadi, Sh. Nategh, A. Khojasteh, M. Rahimian, Fracture modes of an annular crack in a transversely isotropic solid, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 50(5) (2018) 855-864.

DOI: 10.22060/ceej.2017.12713.5255